

# Esercizi di Analisi Matematica II

Dott.ssa R. Toader

Università di Udine, CdL Ingegneria Elettronica, a.a.  
2009/2010

## 1 Funzioni di più variabili a valori reali

### 1.1 Differenziabilità

1. Stabilire quando, al variare di  $\alpha$  in  $\mathbf{R}$ , la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sin[(x^2 + y^2)^\alpha]$$

è continua o differenziabile.

2. La funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(\sqrt{x^2 + y^2}) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

è continua? differenziabile?

3. Dire se la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 y^2 + 1)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile.

4. Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si veda se  $f$  è continua e in quali punti è differenziabile.

5. Stabilire se la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile.

6. Dire se la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{\ln(1 + x^2 + y^2)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è differenziabile.

7. Dire se la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^{xy} - 1)^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile.

8. Sia  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile. Dimostrare che la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = g(x)y$$

è differenziabile.

9. Dire se la seguente funzione è continua o differenziabile:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$