1.9 Serie di Fourier - Esercizi proposti

Esercizio 1.9.1

Determinare il periodo T delle seguenti funzioni.
$f_1(x) = \sin(2x-3)$; $\quad f_2(x) = \cos(x/2) + \cos 2x$;
$f_3(x) = 1 + \sin(3x) + \cos(x/3)$;
$f_4(x) = |\cos(x)| + \sin x$; $\quad f_5(x) = 1 - \sin x \cos(x)$.
[$T_1 = \pi$, $T_2 = 4\pi$, $T_3 = 6\pi$, $T_4 = 2\pi$, $T_5 = \pi$ (essendo $f_5(x) = 1 - \sin(2x)/2$)]

Esercizio 1.9.2

Tracciare il grafico delle funzioni definite su $\mathbf{R}$, che nell'intervallo $[0,\pi)$ sono uguali alla funzione $f(x) = \sin(2x)$ e che soddisfano le seguenti proprietà:
1) 2π-periodica, pari; 2) 2π-periodica, dispari; 3) π-periodica.
Determinare il periodo minimo della funzione risultante. [$T_1 = 2\pi$, $T_2 = T_3 = \pi$]

Esercizio 1.9.3

Data la funzione $f(x) = \sin^2 x + \cos 3x - 5$, si chiede di:

1. calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier;
2. determinarne il periodo;
3. studiare la convergenza quadratica, puntuale, totale di tale sviluppo.

[$f(x) = -9/2 - (1/2)\cos 2x + \cos 3x$, $T = 2\pi$, nessun problema di convergenza]

Esercizio 1.9.4

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione definita in $\mathbf{R}$, periodica di periodo 2π e definita in $(-\pi,\pi)$ come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Studiare la convergenza quadratica, puntuale, totale di tale sviluppo. Scrivere l'uguaglianza di Parseval e da questa determinare la somma della serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

[$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$;
$\frac{5}{24}\pi^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$; $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$]

Esercizio 1.9.5

a) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, pari e tale che

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{per} \quad x \in [0,\pi] \; .$$

b) Verificare che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{e che} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = \frac{\pi^2}{12} \; .$$

c) Discutere il tipo di convergenza.

d) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $g(x)$ periodica di periodo π tale che

$$g(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \;\; \text{per} \;\; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \; .$$

[a) $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{n^2}$; b) si ottengono ponendo $x = 0$ e $x = \pi/2$ nello sviluppo di $f(x)$; c) la convergenza è totale in $\mathbf{R}$ d) osservando che $g(x) = f(x + \pi/2)$, si sostituisce nella serie di Fourier $x + \pi/2$ al posto di x e si utilizzano le opportune identità trigonometriche.]

Esercizio 1.9.6

a) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, dispari e tale che

$$f(x) = x(\pi - x) \;\; \text{per} \;\; x \in [0, \pi] \; .$$

b) Determinare lo sviluppo di Fourier di $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$.

[a) $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$; b) si sostituisce nello sviluppo di $f(x)$; $g(x)$ è pari]

Esercizio 1.9.7

Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x)$, 2π-periodica definita da

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} \qquad \text{per} \quad x \in (-\pi, \pi)$$

e discuterne il tipo di convergenza.

[$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi} \dfrac{8n}{4n^2 - 1} \sin nx$; la serie converge puntualmente a 0 per $x = (2n+1)\pi$ e a $f(x)$ negli altri punti; converge quadraticamente; non converge totalmente in $\mathbf{R}$].