UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Esercizi svolti di analisi reale e complessa

a cura del

Dr. Alfonso Sorrentino

Esercizi assegnati nei tutorati di AM3, AM4 e AC1 da me svolti negli a.a. 2000-01, 2001-02 e 2002-03 (in parte reperibili sul sito internet *www.mat.uniroma3.it*)

Indice

Parte I

Testi degli esercizi

Capitolo 1

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$

1.1 Spazi normati, topologia standard in $\mathbb{R}^n$

Esercizio 1. Verificare che la funzione $\|.\| : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, t.c. $f \mapsto \|f\| \equiv \int_0^1 |f(x)|\,dx$
è una norma su $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Trovare un esempio in cui vale la stretta disuguaglianza triangolare, nel caso della $\|.\|_\infty$; cioè:

$$\|x+y\|_\infty \;<\; \|x\|_\infty \;+\; \|y\|_\infty$$

Esercizio 3. Dimostrare che l'unione di due curve, con un estremo in comune, è ancora una curva.

Esercizio 4. Dimostrare che l'anello $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < 2\}$ è connesso per curve.

Esercizio 5. **(Spazio delle funzioni Lipschitziane)**
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E,\mathbb{R}^m)$:

$$\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m) \equiv \left\{ f \in C(E,\mathbb{R}^m) : \quad \|f\|_{\mathrm{Lip}} \equiv \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Si dimostri che $(\mathrm{Lip}(E,\mathbb{R}^m),\ \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 6. **(Spazi di successioni: ℓ^1 e ℓ^∞)**
Sia $x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una successione a valori reali (o complessi) e definiamo

$$\|x\|_1 \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \qquad \text{e} \qquad \|x\|_\infty \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,.$$

Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \ell^1 &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \|x\|_1 < \infty\} \\ \ell^\infty &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \|x\|_\infty < \infty\} \,. \end{aligned}$$

1 Mostrare che $(\ell^1, \ \|\cdot\|_1)$ e $(\ell^\infty, \ \|\cdot\|_\infty)$ sono spazi di Banach.

2 Mostrare che $\ell^1 \subset \ell^\infty$, ma non è un sottospazio chiuso di $(\ell^\infty, \ \|\cdot\|_\infty)$ (quindi $(\ell^1, \ \|\cdot\|_\infty)$ non è uno spazio di Banach).

3** Qual è la chiusura di ℓ^1 rispetto alla metrica indotta dalla $\|\cdot\|_\infty$?

Esercizio 7. Si consideri lo spazio di Banach $(\ell^1, \ \|\cdot\|_1)$.

(i) Si dimostri che l'insieme

$$\Omega := \{x \in \ell^1 : \quad \|x\|_1 \le 1\}$$

non è compatto.

(ii) Dire se è compatto l'insieme

$$D := \{x \in \ell^1 : \ |x_k| \le 1 \ \ \forall\, k, \ \ x_k = 0 \ \ \forall\, k > 10\} \,.$$

1.2 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$: regolarità, polinomio di Taylor, estremi liberi e vincolati, etc ...

Esercizio 8. Mostrare che la funzione $f(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$ non è continua in O=(0,0,..,0)

Esercizio 9. Fissato un $\epsilon > 0$, si trovi un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, per ogni $|x - x_0| < \delta$ nei seguenti casi:

1. $f = |x|^\alpha, \ \alpha > 0 \ \ x \in \mathbb{R}^4 , \ x_0 = (0,1,1,2)$ (ripetere il calcolo per $x_0 = (0,..,0)$);
2. $f = \sin \frac{1}{x_1 x_3^2}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $x_0 = (-1,0,-1)$;

3. $f = \log[\cos(\prod_{i=1}^{n} x_i)]\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ x_0 = (0,..,0)\,;$

4. $f = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k|x|^2}\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ x_0 = (1,..,1)\,;$

5. $f = \tanh |x|_1\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ x_0 = (1,..,1)\,;$

6. $f = (\,|x|^{\frac{3}{2}}\,,\ \tanh |x|_1\,)\,,\ x \in \mathbb{R}^4\,,\ x_0 = (0,1,1,2)\,;$

Esercizio 10. Sia $\mathcal{S}^2 \equiv \{\, x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| = 1\,\}\,, \overline{x} \equiv (2,0,0)\,,\ x_0 = (1,0,0)\,,$ $f \equiv x_1 x_2 (\sin|x - \overline{x}|)^{-1}\,.$
Trovare δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, per ogni $x \in \mathcal{S}^2$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

Esercizio 11. Sia

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \equiv \left(\dfrac{1}{1+|x|},\ \sin(x_1 x_4) \right)\,. \end{array}$$

Calcolare il modulo di continuità in $x_0 = (0,0,0,0)$.

Esercizio 12. Mostrare che

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

è continua se e soltanto se sono continue le funzioni componenti

$$f_i : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Esercizio 13. Trovare, se esiste, una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x,\, y\, \in\, \Omega$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ e f così definita (con $|\cdot|$ si intende la norma euclidea):

(i) $\quad f(x) = \left(\dfrac{1}{2 - |x|},\ \left| \sin \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \right)\,, \qquad \Omega = B_1(0)\,;$

(ii) $\quad f(x) = \dfrac{1}{2 - |x|^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad \Omega = B_1(x_0), \quad x_0 = (2, \ldots, 2)$
oppure $\ x_0 = (0, \ldots, 0)$ (per il primo dominio dobbiamo supporre che $n \neq 3,\ 4,\ 5,\ 6$);

(iii) $\quad f(x) = e^{|x|^2} x\,, \qquad \Omega = B_r(0),\ r > 0\,.$

Esercizio 14. Sia $\mathcal{P} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y = x^2$ e $(x,y) \neq (0,0)\}$ e consideriamo la funzione di due variabili definita da [1]:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) \notin \mathcal{P} \\ 1 & \text{se } (x,y) \in \mathcal{P} \end{cases}$$

Si controlli che, per la funzione f sopra definita, si ha $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = 0$, per ogni $\xi \neq 0$.

Esercizio 15. Calcolare $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 16. Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè:

1. f sia continua nell'origine;
2. f abbia derivate direzionali nell'origine;
3. f sia differenziabile nell'origine;
4. f sia $C^1(\{0\})$.

Esercizio 17. Sia $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $\mathcal{A}$ aperto.
Dimostrare che se $f \in \mathcal{C}^1(\{x_0\}, \mathbb{R}^n)$ con $x_0 \in \mathcal{A}$, allora f è differenziabile in x_0.

Esercizio 18. Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (\sin(xy),\, e^{xy^2})\,. \end{aligned}$$

1. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Usando la definizione, mostrare che f è differenziabile in $(0,0)$.

[1] Vedi anche [C], Esempio 5.18

3. Sia
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \operatorname{tgh} t + \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$
e si definisca $F(t) \equiv f(g(t),\, 1-g^2(t))$. Calcolare $F'(0)$.

Esercizio 19. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Calcolare:
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,h(x,z),z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x,h(x,z),z)\,.$$

Esercizio 20.

1. Dimostrare che se $y = f(x)$ è una soluzione C^2 in un intorno di $x=0$ dell'equazione
$$x^2 + \sinh y + e^{xy} = 1$$
tale che $f(0)=0$, allora ha un massimo relativo nell'origine.
2. Cosa si può dire relativamente all'esistenza di una funzione siffatta?

Esercizio 21. Siano $x \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ con $f \in \mathcal{C}^1$.

1. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$;
2. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è una funzione $\mathcal{C}^1$, calcolare $\frac{\partial}{\partial t} f(x,\, g(t)\,)$.

Esercizio 22. Consideriamo la funzione $f(x,y,t) = (\sin(tx_1),\, |x|,\, \frac{(y_1+y_2^2x_3)}{1+t}\,)$, con $x \in \mathbb{R}^3$,
$y \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ con $x \neq 0$ e $t \neq -1$;
2. Se $g(t) = (\tanh t,\, \ln[\ln t]\,)$, calcolare $\frac{\partial}{\partial t}\,[f(x,g(t),t)]$ con $x \neq 0$ e $t > 1$.

Esercizio 23. Sia $f(x) = e^{|x|^2}\,(x_1 + x_n^4\,)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Calcolare:

1. $D^1 f(0)\,(\xi)$ e $D^3 f(0)\,(1,2,..,n)^3$;

2. $\frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_5}(1,1,..,1)$ con $n > 5$;

3. $\partial_x^{(1,0,..,10)} f(x_0)$ con $x_0 = 0$ e $x_0 = (-1,1,-1,..,(-1)^n)$;

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$.

Esercizio 24. Sia:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{(x+y)} & \text{se } x \neq y \\ 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} & \text{se } x = y \end{cases}$$

1. Si discuta la continuità di f su $\mathbb{R}^2$;

2. Dato $\epsilon > 0$ si trovi $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$ per ogni $|(x,y)| < \delta$;

3. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$;

4. Trovare il massimo k tale che $f \in \mathcal{C}^k(\{(0,0)\})$ e calcolare il polinomio di Taylor di grado k di f in $(0,0)$.

Esercizio 25. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 in $x = 0$ della funzione $\frac{x_1}{1 - x_2 x_3 x_4}$.

Esercizio 26. 1. Sia $f(x) = x_3 e^{x_1 + x_2}$. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 nell'intorno di $x = 0$;

2. Trovare δ tale che $|f(x)| < \frac{1}{4}$ per ogni $|x| < \delta$.

Esercizio 27. Sia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x|}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e calcolarne le derivate parziali.

Esercizio 28.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq y \\ 4y^2 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Discutere la regolarità di f.

Esercizio 29. Si trovino i punti stazionari e si dica se si tratta di massimi o minimi (relativi o assoluti) di $f(x,y) = (x+3y)e^{-xy}$.

Esercizio 30. Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = x^2y$ sull'insieme
$\mathcal{D} \equiv \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 31. Calcolare $\frac{\partial}{\partial x_i} g(|x|)$ dove $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e g è una funzione $\mathcal{C}^1\left((0,+\infty)\right)$.

Esercizio 32.
1. Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 1000 di $\log(s+t)$ nell'intorno di $(s_0,t_0) = (1,0)$;
2. Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 1000 di $\log(x-y^2)$ nell'intorno di $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Esercizio 33. Sia:

$$f(x,y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ ye^{-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Dimostrare che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$;
2. Studiare la continuità e la regolarità di f in $(1,0)$;
3. Studiare i punti critici di f;
4. Trovare $\delta > 0$ t.c. $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{1}{100}$ per $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$ con $(x_0,y_0) = (1,1)$ e (qualora f sia continua in $(1,0)$) con $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Esercizio 34. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$ per:

1. $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^2$;
2. $f(x) = (x_1 + x_2^2\, , \cos(x_1x_2))$ con $x \in \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$;
3. $f(x,y,z) = \frac{y}{z-x^2}$.

Spiegare il significato del simbolo $\frac{\partial f}{\partial x}$ in ciascuno dei precedenti casi.

Esercizio 35. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine N attorno a $x_0 = 0$, della funzione $|x| \sin|x|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Esercizio 36. Supponiamo che esista una funzione $z = z(x, y)$ che soddisfi, in un intorno del punto $(1, 1)$, la relazione:

$$z^3 - 2xy + y = 0 \quad \text{con } z(1, 1) = 1.$$

Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 nell'intorno di $(1, 1)$ (possibilmente senza esplicitare la $z = z(x, y)$, ma applicando il teorema di differenziazione delle funzioni composte).
<u>Facoltativo:</u> Ripetere il ragionamento precedente per una funzione $z = z(x, y)$ che soddisfi localmente al punto $(1, 1)$ la relazione: $z^3 - 2xy + z = 0$
con $z(1, 1) = 1$.
E se la relazione fosse stata $z^3 - 2xy - 3z = 0$ con $z(1, 1) = 1$?
Cercare di giustificare le risposte date.

Esercizio 37. Siano:

$$s(t) \equiv \begin{cases} \sin \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad \text{e } c(t) \equiv \begin{cases} \cos \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Si definisca $f(x, y) = x^2 s(x) + y^2 c(y)$; discutere la regolarità di f (continuità, differenziabilità, etc..).

Esercizio 38. Trovare Massimo e minimo di $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ su $\mathcal{D} \equiv \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 39. Trovare il rettangolo di area massima, che può essere inscritto nella circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$.

Esercizio 40. Sia

$$f(x, y) = x^2 - xy^2$$

e K il compatto intersezione tra il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ ed il rettangolo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-2, 2]$.

1. Trovare l'estremo superiore ed inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.
2. Determinare i punti critici di f e la loro natura.
3. Calcolare il massimo e il minimo assoluto di f in K.

Esercizio 41. Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \prod_{i=1}^{4} x_i^i \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^4\,,$$

sull'insieme

$$\mathcal{D} \equiv \{x \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 1\}.$$

Esercizio 42. $^{(**)}$
Sia $f(x,y) \equiv \frac{1}{x^2+y^2}$; determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di massimi o minimi) di f sull'insieme

$$\mathcal{A} \equiv \{(x,y) :\; xy + \frac{1}{2}\sin(xy) > 1\}\,.$$

1.3 Equazioni differenziali ordinarie e problemi di Cauchy

Esercizio 43. Consideriamo il seguente problema di Cauchy in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\pi y^2}{(1-2y)^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{y}{(1-2y)}\right) \\[2ex] \dot{y} = 2y^2 \\[2ex] x\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,. \end{cases}$$

1.1 Trovare la soluzione di tale problema, il suo intervallo (α, β) di esistenza massimale e disegnarne un grafico approssimativo.

1.2 Mostrare che

$$\lim_{t\downarrow\alpha} \text{dist}\left(\,(x(t), y(t)),\; \left\{y = \frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

e

$$\lim_{t\uparrow\beta} |(x(t), y(t))| = +\infty\,.$$

In particolare mostrare che comunque si sceglie un punto $P \in [-1,1]\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$, esiste una successione di tempi $t_k \downarrow \alpha$, tale che

$$(x(t_k), y(t_k)) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P\,.$$

1.3 Dedurre che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{y = \frac{1}{2}\}$ e per ogni $0 < \delta < \beta - a$, esistono due tempi $t_0 \in (\alpha,\, \alpha + \delta)$ e $t_1 \in (\beta - \delta,\, \beta)$ tali che

$$\begin{aligned} (x(t_0), y(t_0)) &\notin K \\ (x(t_1), y(t_1)) &\notin K\,. \end{aligned}$$

Esercizio 44. Consideriamo il seguente problema di Cauchy in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta \dfrac{\pi}{4} \left(1 + \dfrac{x^2}{\beta^2}\right) \\ \dot{y} = \beta\, y \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trovare la soluzione $\underline{x}(t, \beta)$ al variare di β ed il relativo intervallo di esistenza massimale I_β.
Mostrare inoltre che esiste una $L > 0$ tale che

$$|\underline{x}(t_0, \beta) - \underline{x}(t_0, \beta')| \le L\, |\beta - \beta'|$$

per ogni $\beta,\, \beta' \in K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ compatto e per ogni $t_0 \in C \subset \cap_{\beta \in K} I_\beta$ compatto.

1.4 Successioni e serie di funzioni. Elementi di analisi complessa

Esercizio 45. Dimostrare che valgono le seguenti due affermazioni:

1. Se $u_n \in \mathcal{C}([a, b])$ e u_n converge uniformemente in (a, b), allora u_n converge uniformemente in $[a, b]$.

2. Se $u_n \in \mathcal{C}([a, b])$ e u_n converge in (a, b) ma $u_n(a)$ non converge, allora u_n non converge uniformemente in (a, b).

Esercizio 46. Sia f_n la funzione continua che vale 0 se $x \notin (0, \frac{1}{n})$, per $x = \frac{1}{2n}$ vale 1 e coincide con una retta negli intervalli $(0, \frac{1}{2n})$ e $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni x;

2. f_n non converge uniformemente su $[0, 1]$;

3. $\lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n = 0\,.$

Esercizio 47. Trovare una successione di funzioni continue $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, convergente puntualmente ad una funzione continua $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ma tale che $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$.

(<u>Facoltativo</u>): Sia $k \in N$. E'possibile trovare una successione di funzioni $f_n \in \mathcal{C}^k([0,1])$, convergente puntualmente ad una funzione $f \in \mathcal{C}^k([0,1])$ tale che $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$?
E se richiedessi alle funzioni di essere $\mathcal{C}^\infty([0,1])$?

Esercizio 48. Sia $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$.

1. Trovare, per $x > 0$, il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$ al tendere di n ad infinito.
2. Discutere l'uniformità della convergenza di f_n ad f.

Esercizio 49. Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni di x, (ossia si trovino i più grandi insiemi dove le serie convergono puntualmente, uniformemente e totalmente) al variare, qualora appaia, del parametro reale α:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} x^n$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{n^x}$$
3. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x \sin n)^n}{1+n^2 x}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x+n!}$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{con } u_n(x) \equiv (\sum_{j=1}^{n} j^x)^{-1}$$

Esercizio 50. Usando le proprietà di derivazione delle serie uniformemente convergenti, si calcoli il valore delle seguenti serie:

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

Esercizio 51. Sia $u_n = \frac{1}{n^2}\int_0^1 e^{-nxt^4}dt$. Discutere la convergenza (puntuale, uniforme e totale) di $u(x) \equiv \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ e di $v(x) \equiv \sum_{n\geq 1} u'_n(x)$, e dire per quali x la funzione $u(x)$ è derivabile e la sua derivata coincide con $v(x)$.

Esercizio 52. Dimostrare gli sviluppi in serie di Potenze delle seguenti funzioni elementari:

1. $\frac{x^m}{(1-x)^n} = \sum_{k=m}^{+\infty} \begin{pmatrix} n-1-m+k \\ n-1 \end{pmatrix} x^k \qquad n, m \in N\,,\ n \geq 1\ \ |x| < 1$
2. $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x$
3. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad |x| < 1$
4. $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus Z\,,\ |x| < 1$ [2]
6. $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x$
7. $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x$
8. $\arcsin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \qquad |x| < 1$
9. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \qquad |x| < 1$ [3]
10. $\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1$
11. $\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x$ [4]
12. $\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x$ [5]

---

[2] I coefficienti binomiali sono così definiti $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 1$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \alpha$ e $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ per $k \geq 2$.
Sugg: Usare la formula del resto integrale di Taylor, e dimostrare che questo tende a 0, usando i seguenti accorgimenti:
Siano $x \in (-1,1)$ e $|x| < \theta < 1 \Rightarrow$ esiste $\epsilon > 0$ t.c. $\theta(1+\epsilon) < 1$; Sia inoltre k_0 t.c. $\forall\, k \geq k_0$ $\left|\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}\right|^{\frac{1}{k}} \leq 1+\epsilon$ (perchè posso dire che esiste un tale k_0?)

[3] Osservare che $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

[4] Osservare che $\sinh x = -i \sin ix$

[5] Osservare che $\cosh x = \cos ix$

13. arcsinh $x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \qquad |x| < 1$ [6]

14. arctanh $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1$ [7]

Esercizio 53. Si diano le definizioni di $\exp(z)$ e di π e si dimostri (nella maniera più completa possibile) che $\exp(i\pi) = -1$.

Esercizio 54. Data $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^\infty$, $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$ con $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) = [0, \varepsilon]$, si costruisca $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$, monotona non decrescente tale che $g_\varepsilon(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $g_\varepsilon(x) = 1$ per $x \geq \varepsilon$. Si calcolino le serie di Taylor di g_ε in $x = 0$ e $x = \varepsilon$.

1.5 Teorema delle funzioni implicite e della funzione inversa

Esercizio 55. Sia M una matrice di funzioni nella variabile t: $t \to M(t)$; diremo che $M(t)$ è continua $\iff$ $M_{i,j}(t)$ è una funzione continua $\forall\, i, j$. Dimostrare che :

$$M(t) \text{ è continua } \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta \text{ t.c. } \|M(t) - M(t_0)\| < \epsilon\,,\ \forall\, |t - t_0| < \delta$$

Esercizio 56. Si consideri la funzione $f : y \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(y) = (f_1(y), f_2(y)) \in \mathbb{R}^2$ definita come:

$$f_1 = y_1 + y_1^2 \cos y_2 \quad f_2 = y_2 + y_1^2$$

Si dica se f è invertibile in un intorno di $y_0 = (0, 0)$ e se sì, si dia una stima di r in modo che valga la condizione del teorema della funzione inversa.

Esercizio 57. Sia

$$f(x, y) = |x|^2 + y^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6y - 11$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$.

1. Quante soluzioni g di classe C^∞ in un intorno del punto $x_0 = (1, -2)$, esistono per l'equazione $f(x, g(x)) = 0$?

2. Si verifichi che se $g(x_0) > 0$ allora g ha un massimo relativo stretto in x_0.

[6] Osservare che arcsinh $x = -i \arcsin ix$

[7] Osservare che arctanh $x = -i \arctan ix$ oppure che arctanh $x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Esercizio 58. [8]
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore di norma minore o uguale a 1 e sia

$$f(x) \equiv x + v \sin |x|^2 .$$

Si dica se f è invertibile in un intorno di $x = 0$ ed in caso affermativo si trovi un $r > 0$ tale che f^{-1} sia definita su $B_r(0)$.

Esercizio 59.

1. Dimostrare che in un intorno di $(0,0)$ l'equazione

$$e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2\sin y = 1$$

definisce una funzione $y = f(x)$.

2. Dare una stima sull'intorno di definizione delle f.

3. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} .$$

[8] Questo esercizio può essere formulato nella seguente maniera equivalente:
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore di norma minore o uguale a 1 e sia

$$f(x) \equiv x + v \sin |x|^2 .$$

Si dica se l'equazione

$$f(x) - y = 0$$

ammette una soluzione $x = g(y)$ in un intorno di $y = 0$ ed in caso affermativo si trovi un $r > 0$ tale che g sia definita su $B_r(0)$.

Capitolo 2

Integrazione in $\mathbb{R}^n$

2.1 Misura di Peano-Jordan e integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

Esercizio 60. Sia $f \equiv 0$ su $([0,1]\setminus\mathbb{Q}) \cup \{0\}$ e $f(x) = \frac{1}{n}$ se $x = \frac{m}{n}$ con $0 \leq m \leq n$ (m e n relativamente primi).

1. Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è $\mathbb{Q} \cap (0,1]$;
2. Dimostrare direttamente (senza usare il Teorema di Vitali-Lebesgue) che $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

Esercizio 61. Dimostrare che $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato è misurabile secondo Peano-Jordan $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E_1, E_2$ insiemi elementari t.c. $E_1 \subset A \subset E_2$ e $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 < \varepsilon$.
Inoltre $\text{mis}_n A = \inf\{\text{mis}_n E_2 : \ A \subset E_2, E_2$ insieme elementare$\} = \sup\{\text{mis}_n E_1 : E_1 \subset A, E_1$ insieme elementare$\}$.

Esercizio 62. Dimostrare che se A è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan, lo sono anche $\overline{A}$, $\overset{o}{A}$ e ∂A.

Esercizio 63. Dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ (con E rettangolo qualunque, non degenere) è un insieme di misura nulla, non misurabile secondo Peano-Jordan.

Esercizio 64. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla, allora $\overset{o}{X} = \emptyset$;

2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ con $\overset{o}{X} = \emptyset$, allora X ha misura nulla;

3. Se Q_x , $Q^y \subset \mathbb{R}$ hanno misura (unidimensionale) nulla, allora $Q_x \times Q^y \subset \mathbb{R}^2$ ha misura (bidimensionale) nulla;

4. Se $Q \subset \mathbb{R}^2$ ha misura nulla, allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $Q_x \equiv \{y : (x,y) \in Q\}$ e $Q^y \equiv \{x : (x,y) \in Q\}$ sono insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}$.

Esercizio 65. Sia $X \subset \mathbb{R}$ l'insieme degli elementi di una successione $\{x_n\}_n$ di numeri reali convergente. Dimostrare che X è Peano Jordan misurabile e $\text{mis}(X) = 0$.
Cosa si può dire se la successione non è convergente?

2.2 Integrali iterati

Esercizio 66.

i)	$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le x\}$
ii)	$\iint_D x^2 y^2\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$x^2 + y^2 \le 1\}$
iii)	$\iint_D y^3 e^x\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$y \ge 0,\ x \le 1,\ x \ge y^2\}$
iv)	$\iint_D xy\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

Esercizio 67. Dimostrare che:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \frac{1}{2} \qquad \text{mentre} \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}\ .$$

Come mai in questo caso non si può invertire l'ordine d'integrazione?

Esercizio 68. Calcolare

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2\,,\ \frac{1}{x} \le y \le x\right\}$.

Esercizio 69. Calcolare

$$\iint_D y^3 e^x\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \ge 0,\ x \le 1\,,\ x \ge y^2\}$.

Esercizio 70. Calcolare
$$\iint_D xy\,dx\,dy$$
dove $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y \geq 1\,,\; x^2+y^2 \leq 1\big\}$.

Esercizio 71. Sia $a > 1$. Calcolare l'area della regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata dalle rette $y = ax$, $y = \dfrac{x}{a}$ e la parabola $y = a^2x^2$. Per quale valore di a tale area è massima?

Esercizio 72. Calcolare il seguente integrale triplo:
$$\iiint_{\mathcal{D}} x^2\;dx\,dy\,dz$$
sull'ellissoide $\mathcal{D} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ con $a, b, c > 0$.

Esercizio 73. Trovare il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^3$ con la $\|\,.\,\|_1$ (cioè $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; |x| + |y| + |z| \leq 1\,\}$). Usando il risultato precedente, trovare il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^4$ con la $\|\,.\,\|_1$.
*(Facoltativo) Generalizzare il risultato precedente nel caso di una palla unitaria n-dimensionale.
(Sugg.: Procedere per induzione)

Esercizio 74. Si definisca:
$$\mathcal{D}_n \equiv \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1\};$$
Calcolare:

1. $\mathbb{I}_2 = \int_{\mathcal{D}_2} xy\,dx\,dy$;
2. $\mathbb{I}_3 = \int_{\mathcal{D}_3} xyz\,dx\,dy\,dz$;
3. *(Facoltativo) $\mathbb{I}_n = \int_{\mathcal{D}_n} (x_1 \ldots x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$.

Esercizio 75. Trovare il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2+y^2 \leq 1$, compresa tra la superficie di equazione $z = x^2+y^2-2$ ed il piano $x+y+z = 4$.

Esercizio 76. Sia

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq (x^2-y^2)\}\,.$$

1. Descrivere E in coordinate polari (ed eventualmente disegnarlo).
2. Calcolare l'area di E.
3. Sia $k > 0$; trovare l'area dell'insieme
$$E_k \equiv \{(kx, ky) : \quad (x,y) \in E\}\,.$$
4. Trovare il volume dell'insieme
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq (1-z^2)(x^2-y^2),\ |z| \leq 1\}\,.$$

Esercizio 77. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_{\mathcal{T}} x^2(y-x^3)e^{y+x^3}\,dxdy$$

dove:

$$\mathcal{T} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^3 \leq y \leq 3,\ x \geq 1\}.$$

(Sugg.: Considerare il cambio di variabili $u = y - x^3$ e $v = y + x^3$)

Esercizio 78. (Teorema di Guldino)
Sia D un insieme Peano Jordan misurabile e connesso, contenuto nel semipiano $< x, z >$ e non intersecante l'asse delle z. Consideriamo il solido Δ ottenuto ruotando D attorno all'asse delle z. Dimostrare che:

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = 2\pi \frac{\iint_D x\,dx\,dz}{\iint_D dx\,dz} \mathrm{mis}_2(D).$$

Dedurre che tale volume coincide con la misura dell'insieme D, moltiplicata per la lunghezza della circonferenza percorsa dal suo baricentro.
Applicare questo risultato per calcolare il volume dei seguenti solidi di rotazione:

1. Sfera di raggio r;
2. Toro tridimensionale, ottenuto ruotando il cerchio di centro $(a, 0)$ e raggio $r < a$;
3. Cilindro di altezza h e raggio di base r;
4. Cono circolare retto di altezza h e raggio di base r;
5. Tronco di cono di altezza h, raggio della base inferiore R e della base superiore r.

Esercizio 79. Sia Ω il solido limitato dal cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Calcolare:

$$\iiint_\Omega \left(xe^{1+z^2} \ln(1+z^2) - y \sin z + 1\right) dx\, dy\, dz$$

Esercizio 80. Dopo aver disegnato la regione D delimitata dalle superfici

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 4z = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D x\sqrt{|yz|}\, dx\, dy\, dz.$$

Esercizio 81. Calcolare qualora esista $\int_D xe^{-xy}\, dx\, dy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y,\ x, y > 0\}$.
(Si ricorda che f è integrabile su un dominio D non limitato, se esiste una successione crescente $\{D_k\}_k$ di domini limitati tale che $D = \cup_k D_k$, f è integrabile su D_k per ogni k e $\sup_k \int_{D_k} |f| < \infty$. In tal caso, $\int_D f = \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f$)

Esercizio 82. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p > 0$, la funzione z^α è integrabile su

$$F_p \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 < z < 1\,,\ x^2 + y^2 \leq z^{2p}\}\,,$$

e per tali valori calcolare

$$\iiint_{F_p} z^\alpha\, dx\, dy\, dz\,.$$

2.3 Integrazione su varietà di $\mathbb{R}^n$ e forme differenziali

Esercizio 83. Sia Γ la curva in $\mathbb{R}^3$ data dall'intersezione delle superfici $\{y = x^2\}$ e $\{z = x^3\}$ e limitata dai piani $\{x = 1\}$ e $\{x = 2\}$. Verificare che Γ é un elemento di curva regolare e calcolare $\int_\Gamma f\, ds$ con $f \equiv \frac{\log|z|}{\sqrt{1+4y+9xz}}$.

Esercizio 84. (Superfici di rotazione in $\mathbb{R}^3$)
Sia $\Gamma \equiv \{(u(t), v(t)) : \ t \in (a,b)\}$ un elemento di curva regolare (eventualmente chiusa) in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che:

$$\mathcal{S} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = u(t)\cos\theta, \ y = u(t)\sin\theta, \ z = v(t) \text{ con } t \in (a,b) \text{ e } \theta \in (0,\alpha)\}$$

é un elemento di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli l'area in termini di un integrale su (a,b).

Esercizio 85. Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$, espressa (in coordinate polari) dalla condizione:

$$\rho = a\,(1 + \cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Calcolarne la lunghezza al variare del parametro $a > 0$.
(Nota: Tale curva prende il nome di "*Cardioide*".)

Esercizio 86. Calcolare l'area della superficie di un Toro tridimensionale $\mathbb{T}^3$, avente raggi r e R (con $r < R$).
(Nota: Tale *toro* può essere visto come un insieme in $\mathbb{R}^3$ generato dalla rotazione completa intorno all'asse z (od intorno ad una qualsiasi altra retta) di un cerchio di raggio r che giace su un piano contenente l'asse z e tale che la distanza del centro del cerchio dall'asse sia uguale ad $R > r$.)

Esercizio 87. Verificare il teorema della divergenza (in $\mathbb{R}^2$) nel seguente caso:

$$f(x,y) = (1 + xy, x) \qquad \text{ed} \qquad \mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 + y^2 < 1, \ y > 0\}\,.$$

Esercizio 88. Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare chiusa. Sapendo che il volume di Ω è 1, si calcoli il flusso (esterno) attraverso $\partial\Omega$ di $F(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^3$).

Esercizio 89. Dire se le seguenti 1-forme differenziali sono chiuse o esatte nel loro dominio di definizione; qualora siano esatte, trovarne una primitiva:

1. $\omega(x,y,z) = x^3\,dx + y^2\,dy + z\,dz$;
2. $\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$;
3. $\omega(x,y,z) = \frac{1}{1+y^2}\,dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\,dy$;
4. $\omega(x,y,z) = \frac{Ax+By}{x^2+y^2}\,dx + \frac{Cx+Dy}{x^2+y^2}\,dy$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Esercizio 90. Calcolare l'integrale curvilineo della 1-forma differenziale

$$\omega(x, y) = x^2\, dx + xy^2\, dy$$

lungo la frontiera φ del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, percorso in senso antiorario.

Esercizio 91. Sia $\mathcal{T} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| + |y| + |z| \leq 1\}$.

1. Calcolare $\int_{\mathcal{T}} |z|^\gamma\, dx\, dy\, dz$ per i $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito;
2. Calcolare $\int_{\mathcal{T}} \left(|x|^\alpha + |y|^\beta + |z|^\gamma\right)\, dx\, dy\, dz$ per gli $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ per cui tale integrale esiste;
3. Calcolare il flusso uscente da $\mathcal{T}$ del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$;
4. Calcolare il flusso di F attraverso la porzione di $\mathcal{T}$ contenuta nel primo ottante.

Esercizio 92. Calcolare $\int_{+\partial S} \omega$ direttamente e per mezzo del teorema di Stokes, dove:

- $\omega = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2 + z^2}$,
- S è la superficie laterale del cilindro $\{x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$, con l'orientazione della normale esterna.

Esercizio 93. Sia $\mathcal{C} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$:

1. Calcolare il volume di $\mathcal{C}$;
2. Sia $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$; trovare il flusso di F uscente da $\mathcal{C}$;
3. Trovare il flusso di F uscente da ciascuna delle singole porzioni della frontiera di $\mathcal{C}$;
4. Calcolare l'area della frontiera di C.

Esercizio 94. Consideriamo il dominio tridimensionale

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,\}\ .$$

1. Calcolare l'area di ∂E.

2. Sia F il campo vettoriale così definito:

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \; ;$$

trovare il flusso uscente di F attraverso ciascuna delle due superfici regolari che costituiscono ∂E.

3. Utilizzando il punto precedente, dedurre il volume di E.

Esercizio 95. Si consideri il dominio tridimensionale di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\} .$$

1. Si calcoli l'area della superficie ∂E;

2. si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso ∂E (direttamente senza utilizzare il teorema della divergenza);

3. usando il punto precedente, calcolare il volume di E.

Esercizio 96. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{(y^3 - x^2 y) \, dx \; + \; (x^3 - y^2 x) \, dy}{(x^2 + y^2)^2} \, .$$

1. Dimostrare che ω è chiusa. Si può dedurre da ciò che ω è esatta? Perché?

2. Sia $\alpha > 0$ e sia $\gamma_\alpha = +\partial B_\alpha(0)$ (cioè una circonferenza di centro l'origine e raggio α, orientata positivamente). Calcolare

$$\int_{\gamma_\alpha} \omega \, .$$

3. $^{(*)}$ Sia ora γ una qualsiasi curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che "*compia un giro intorno all'origine*". Mostrare che

$$\int_\gamma \omega \; = \; 0 \, .$$

4. Dedurre dai punti precedenti che ω è esatta e trovarne una primitiva.

2.4 Serie di Fourier e applicazioni

Esercizio 97. Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi} \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

e studiarne la convergenza in $[-\pi, \pi]$.

Dedurre il valore delle seguenti somme:

(i) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$; (ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$; (iii) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$; (iv) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Esercizio 98. Risolvere i seguenti problemi di Dirichlet per equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate parziali:

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x & 0 \leq x \leq \pi \ ; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u(x,0) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x,\pi) = x^2 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u(\pi,y) = \pi^2 & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Capitolo 3

Analisi complessa

Esercizio 99. Trovare i valori di:

1. $\mathrm{Im}\{(1+i)^n + (1-i)^n\}$;
2. $\mathrm{Re}\{(1+i)^n + (1-i)^n\}$;
3. i^i;
4. $(-1)^{2i}$;
5. $\sqrt[4]{i}$.

Esercizio 100. Trovare l'estremo superiore e inferiore delle seguenti funzioni, nel dominio D indicato:

1. $|\sin z|$ su $D = \mathbb{C}$;
2. $|\sin z|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \quad |\mathrm{Im}\, z| < R\}$;
3. $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$;
4. $|e^{\frac{z-i}{z+i}}|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Esercizio 101. Dimostrare che:

1. *$f(z)$ è analitica su Ω $\iff$ $\overline{f(\overline{z})}$ è analitica su $\overline{\Omega}$.* [1]

2. *Una funzione analitica non costante, non può essere costante in modulo.*

3. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che* $\mathrm{Re}\, f = f$.

[1] Abbiamo definito $\overline{\Omega} \equiv \{\overline{z} : \quad z \in \Omega\}$

4. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che* $\operatorname{Im} f = f$.

Esercizio 102. Trovare il più generale polinomio armonico della forma:

$$P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \ .$$

Determinare, inoltre, la funzione armonica coniugata e la corrispondente funzione analitica.

Esercizio 103.
1. Espandere $\frac{2z+3}{z+1}$ in serie di potenze di $z - 1$. Qual è il raggio di convergenza?
2. Espandere $(1 - z)^{-m}$ con $m > 0$ in serie di potenze di z.

Esercizio 104. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$

Esercizio 105. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}}$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$.

Quanto vale la somma delle serie (1) ?

Esercizio 106. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza R, calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$;
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$;
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}$.

Esercizio 107. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_\sigma x\,dz$ dove σ è il segmento orientato da 0 a $1+i$;
2. $\int_{|z|=R} x\,dz$ in due modi diversi:
   (a) mediante calcolo diretto;
   (b) osservando che $x = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$ sulla circonferenza $\{|z| = R\}$;
3. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;
4. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$;
5. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$;
6. $\int_{|z|=\rho} \frac{dz}{|z-a|^2}$ con la condizione che $|a| \neq \rho$;
7. $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$;
8. $\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\,dz$ al variare di n, $m \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 108. (*) (Stime di Cauchy e applicazioni)

1. Sia f una funzione analitica su Ω, tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $|z| \leq R$ (con $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$). Sia $0 < \rho < R$; trovare una stima di:
$$\sup_{|z|\leq\rho} |f^{(n)}(z)| \,.$$
2. Mostrare che le derivate successive di una funzione analitica in un punto, non possono mai soddisfare la relazione $|f^{(n)}(z)| \geq n!n^n$, per ogni n.

Esercizio 109. Dimostrare che una funzione intera con parte reale positiva, è costante.

Esercizio 110.
- Trovare f analitica su $\{|z| < 1\}$, e non identicamente nulla, tale che possieda un numero infinito di zeri.
- Sia f come sopra. Esiste g analitica in $|z| < R$ (con $R > 1$), tale che $f \equiv g$ su $\{|z| < 1\}$? (giustificare la risposta!)

Esercizio 111. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e doppiamente periodica, allora f è costante. (Doppiamente periodica: per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$, dove $\omega_1,\, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$). [2]

Esercizio 112. Sia f analitica sul disco unitario aperto, con $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$; dimostrare che se f ha in 0 uno zero di ordine m, e $f(z) \neq \lambda z^m$ (con $|\lambda| = 1$), allora:

$$|f(z)| < |z|^m \qquad \forall\, |z| < 1\,.$$

Esercizio 113. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tc $|f(z) - 1| < 1$ per ogni $z \in \Omega$. Si dimostri che:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0 \qquad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \subset \Omega\,.$$

Esercizio 114.

1. Mostrare che ogni trasformazione lineare fratta che mappa l'asse reale in se stesso, può essere scritta con coefficienti reali.
2. La riflessione $z \to \overline{z}$ è una TLF? Giustificare la risposta

Esercizio 115. Trovare una TLF che mappi:

1. il semipiano $\mathrm{Im} z > 0$ nel cerchio unitario di centro l'origine, in modo che un punto fissato z_0 (con $\mathrm{Im} z_0 > 0$) vada nel centro;
2. il cerchio $|z| = 2$ in $|z+1| = 1$, in modo che $-2 \to 0$ e $0 \to i$;
3. i cerchi $|z| = 1$ e $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ in due cerchi concentrici. Qual è il rapporto tra i raggi?
4. la regione tra i cerchi $|z| = 1$ e $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, nel semipiano $x > 0$. (Attenzione: in questo caso non viene proprio una TLF... andrà composta con qualche funzione elementare nota!)

Esercizio 116. Sia $R(z) = \frac{z+1}{z-1}$ una TLF; descrivere (completamente) l'immagine tramite R delle rette verticali $x = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

---

[2] Per la cronaca: una funzione con queste caratteristiche, si chiama *funzione ellittica*.

Esercizio 117. (**) Sia f una funzione analitica su $\mathrm{Imz} \geq 0$ tale che

$$\exists \lim_{z\to\infty} f(z) < \infty \, .$$

Dimostrare che per ogni z_0 tc $\mathrm{Imz_0} > 0$ si ha la seguente relazione :

$$f(z_0) = \frac{\mathrm{Imz_0}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{|t - z_0|^2}\, dt.$$

(Sugg.: può essere utile ricordarsi la formula di Cauchy su dischi ed aver fatto l'esercizio 2.1).

Esercizio 118. 1. Sia f una funzione meromorfa con polo di ordine h in z_0; dimostrare che:

$$\mathrm{Res_{z_0} f} = \frac{1}{\mathrm{(h-1)!}} \mathrm{D_z^{h-1}[(z - z_0)^h f(z)]_{|z=z_0}} \, .$$

2. Sia f una funzione analitica in Ω e g meromorfa con polo semplice in $z_0 \in \Omega$. Calcolare il $\mathrm{Res_{z_0} fg}$.

Esercizio 119. Trovare i poli e i residui delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{cc}
(a) & \frac{1}{z^2+5z+6} \\
(b) & \frac{1}{(Z^2-1)^2} \\
(c) & \frac{1}{\sin z} \\
(d) & \operatorname{cotan} z := \frac{\cos z}{\sin z} \\
(e) & \frac{1}{\sin^2 z}
\end{array}$$

Esercizio 120. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ con $a > 1$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}$ con $|a| > 1$;
3. $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx$;
4. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$ con $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 121. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ con $a > 1$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}$ con $|a| > 1$;
3. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx$;
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx$;
5. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\, dx$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
6. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
7. $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$;
8. $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\, dx$ con $0 < \alpha < 2$.

Esercizio 122. Quante radici possiedono i seguenti polinomi, nei domini di fianco indicati?

(a) $P_1(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$, nel disco $|z| < 1$;

(b) $P_2(z) = z^4 - 6z + 3$, nell'anello $1 \leq |z| < 2$;

(c) $P_3(z) = z^4 + z^3 + 1$, nel quadrante $\{z = x + iy \mid x, y > 0\}$.

Esercizio 123. Sia $P(x)$ un polinomio con coefficienti reali e con coefficiente direttore 1. Supponiamo inoltre che $P(0) = -1$ e che $P(x)$ non abbia radici complesse nel cerchio unitario. Dimostrare che $P(1) = 0$.

(Sugg.: Per cominciare, dimostrate che se ho un polinomio monico

$$Q(z) = z^n + \ldots + a_0$$

allora il prodotto delle sue radici (considerate con molteplicità) è uguale a $(-1)^n a_0$.)

Esercizio 124. Sia f_n una successione di funzioni analitiche in Ω, con al più m zeri in Ω (contati con le relative molteplicità). Supponiamo che f_n converga uniformemente a f sui compatti di Ω; dimostrare che o f è identicamente nulla, oppure f ha al più m zeri in Ω (contati con molteplicità).

Esercizio 125. Sia f una funzione analitica in $z = 0$ tale che $f'(0) \neq 0$; dimostrare che per ogni n, esiste g analitica in un intorno di 0, tale che per ogni punto in tale intorno si abbia la rappresentazione:

$$f(z^n) = f(0) + g(z)^n \ .$$

Esercizio 126. (i) Mostrare che

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

(Sugg.: Trovare un'espressione ricorsiva per $a_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$)

(ii) Dimostrare che per $|z|<1$, si ha:

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})\ldots=\frac{1}{1-z}\ .$$

Sugg.: dimostrare che

$$\prod_{n=1}^{m}(1+z^{2^n})=\sum_{n=0}^{2^m-1}z^{2n}\ .$$

Esercizio 127. Mostrare che la funzione:

$$\theta(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z})$$

con $|h|<1$, è una funzione intera e soddisfa l'equazione funzionale

$$\theta(z+2\log h)=h^{-1}e^{-z}\theta(z)\ .$$

Esercizio 128. (a) Applicare il teorema di Weierstrass [3] nel caso della funzione $f(z)=\sin\pi z$, lasciando, per ora, indeterminata la funzione $g(z)$.

---

[3] Ricordiamo il seguente risultato:

Teorema (Weierstrass). *Fissata una successione $\{a_n\}_n\subset\mathbb{C}^*$ tale che $a_n\to\infty$, ed $m\in\mathbb{N}$, esiste una funzione intera il cui insieme degli zeri (esluso eventualmente l'origine), coincide esattamente con $\{a_n\}_n$, ed avente nell'origine uno zero di ordine m se $m>0$. Tale rappresentazione non è ovviamente unica; infatti, se f è una funzione intera con esattamente tali zeri, allora si può rappresentare nella forma:*

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \tag{3.1}$$

dove g è una funzione intera, e gli m_n sono certi interi.

La rappresentazione (3.1) diventa interessante quando possiamo scegliere gli m_n tutti uguali tra loro (in tal caso parleremo di *prodotti canonici*). Una condizione sufficiente affinché si possa fare ciò è l'esistenza di un intero non negativo k tale che:

$$\sum_n\frac{1}{|a_n|^{k+1}}<\infty\ .$$

Denotiamo con h il più piccolo di tali interi; allora h è detto *genere del prodotto canonico*. Inoltre, se in (3.1) (con l'hp che il prodotto sia canonico) $g(z)$ è un polinomio, allora la funzione f si dice di *genere finito*, ed il suo genere è proprio il massimo tra il grado di g e il genere del prodotto canonico.

(b) Usare il fatto che [4]

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) ,$$

per ricavarsi la funzione $g(z)$.

(c) Dedurre dall'espressione ottenuta nei punti (a) e (b), il genere della funzione $\sin \pi z$, e la rappresentazione:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) .$$

(d) Usare i risultati ottenuti, per calcolare il prodotto nel punto (i), dell'esercizio 1.

Esercizio 129. Sia n un intero positivo; calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} \, d\theta \, .$$

Esercizio 130. Sia f una funzione analitica su $\mathbb{C}$, e supponiamo che assuma valori reali sull'asse reale e valori immaginari sull'asse immaginario. Dimostrare che f è una funzione dispari (cioè $f(z) = -f(-z)$ per ogni z).

Esercizio 131. Sia g una funzione continua su $[0, 2\pi]$ tale che $g(0) = g(2\pi)$. Rispondere nella maniera più esauriente possibile alle seguenti domande:

(i) Supponiamo che esista una funzione analitica f sul disco unitario chiuso, tale che

$$f(e^{i\theta}) = g(\theta)$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Quanto vale f nell'origine?

(ii) Esiste almeno una funzione siffatta? In caso affermativo, darne un'espressione esplicita.
Oss: Formalmente il nostro problema si può riscrivere: $f \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 & \text{se } |z| \leq 1 \\ f(z) = g(\operatorname{Arg} z) & \text{se } |z| = 1 \end{cases}$$

(iii) Quante funzioni di questo tipo possono esistere?

[4] Per una dimostrazione di ciò si rimanda ad un qualsiasi testo di analisi complessa.

(iv) Supponiamo di considerare un generico dominio $\overline{\Omega}$ chiuso e semplicemente connesso. Ammette ancora una soluzione il problema precedente? E' unica? (Ovviamente stiamo supponendo questa volta di conoscere il valore assunto su $\partial\Omega$). Non è richiesta questa volta di darne un'espressione esplicita.

(v) Riflettere su quale proprietà della funzione f abbiamo veramente usato... è necessario che sia analitica? A quale classe di funzioni a valori reali potete estendere tutto ciò? Vi ricorda qualche risultato noto?

Esercizio 132. Sia f una funzione definita nel semipiano superiore Σ^+, con f periodica di periodo 1 (cioé $f(z) = f(z+1)$ per ogni z).

(i) Dimostrare che esiste una funzione g analitica nel disco unitario privato dell'origine (che denoteremo D^*), tale che:

$$g(e^{2\pi iz}) = f(z)$$

per ogni $z \in \Sigma^+$.

(ii) Qual è la serie di Laurent per g? scrivere i coefficienti in forma integrale.

(iii) Dimostrare che la funzione f ha un'espansione della forma

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inz}$$

dove

$$c_n = \int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)}dx$$

per ogni $y > 0$.

Esercizio 133. Si calcolino i seguenti integrali definiti, usando il **teorema dei**

residui.

$$
\begin{array}{lll}
a) & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta & \\
b) & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} & a>b>0 \\
c) & \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}\, d\theta & a>1 \\
d) & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\, dx & 0<a<1 \\
e) & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^b}\, dx & b>1 \\
f) & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^a(x+1)}\, dx & 0<a<1 \\
g) & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)(x+b)}\, dx & a,\, b>0\,,\ a\neq b \\
h) & \displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx & \\
i) & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx\,. &
\end{array}
$$

Parte II

Soluzioni degli esercizi

Capitolo 1

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$

1.1 Spazi normati, topologia standard in $\mathbb{R}^n$

Esercizio 1. Osserviamo innanzitutto che la funzione definita è a valori reali non negativi (è una conseguenza immediata della positività dell'integrale secondo Riemann[1]). Sarà quindi sufficiente verificare le tre proprietà che caratterizzano una norma[2]:

1. *non degenerazione*: L'implicazione ($\leftarrow$) è banale; mentre per l'implicazione ($\rightarrow$) si può procedere per assurdo supponendo che $\exists\ a \in [0,1]$ t.c. $|f(a)| > 0$, e applicando il teorema della permanenza del segno si giunge immediatamente alla conclusione;
2. *omogeneità*: segue dalla linearità dell'integrale;
3. *disug. triangolare*: basta osservare che $|f(x)+g(x)| < |f(x)|+|g(x)|$. Per la monotonia e la linearità dell'integrale secondo Riemann, si ha la tesi.

Esercizio 2. Consideriamo ad esempio i vettori $x = (1,0,0,..,0)$ e $y = (0,1,0,..,0)$.

Esercizio 3. Siano date due curve [3]
$\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}^n :\ \gamma = \gamma(t),\ a \leq t \leq b\}$
$\Phi = \{\phi \in \mathbb{R}^n :\ \phi = \phi(t),\ a \leq t \leq b\}$
che soddisfano la condizione $\gamma(b) = \phi(a)$. Consideriamo l'applicazione :

$$\lambda(t) \equiv \begin{cases} \gamma(2t-a) & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \phi(2t-b) & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b \end{cases}$$

[1] [C], R 0.1
[2] [C], Definizione 6.1
[3] [C], Definizione 5.16

Definendo la curva $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \ \lambda = \lambda(t), \ a \leq t \leq b\}$, si verifica che $\Lambda = \Gamma \cup \Phi$.

Esercizio 4. E' conveniente utilizzare la rappresentazione in coordinate polari e osservare che in tale sistema di coordinate l'insieme considerato è un rettangolo, quindi è un insieme convesso, che è connesso per segmenti.
Quindi dati comunque $P = (r_P, \theta_P)\,, Q = (r_Q, \theta_Q) \in \mathcal{A}$, basterà considerare la curva:

$$\gamma: \ t \mapsto \ (x = (tr_Q + (1-t)r_P)\cos(t\theta_Q + (1-t)\theta_P)\,, y = (tr_Q + (1-t)r_P)\sin(t\theta_Q + (1-t)\theta_p)).$$

Esercizio 5. Cominciamo col mostrare che l'applicazione

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}} : \quad \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una norma su tale spazio.

- Chiaramente $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \geq 0$ per ogni $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{x\in E} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

  Quindi abbiamo mostrato la *positività* e la *non degenerazione*.

- Mostriamo l'*omogeneità*. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} \|af\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|af(x) - af(y)|}{|x-y|} + \sup_{x\in E} |af(x)| = \\ &= |a| \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + |a| \sup_{x\in E} |f(x)| = \\ &= |a|\, \|f\|_{\mathrm{Lip}}\,. \end{aligned}$$

- Infine, facciamo vedere che vale la *disuguaglianza triangolare*. Siano f e g due funzioni in $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$. Osserviamo in via preliminare che

$$\begin{aligned} \frac{|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))|}{|x-y|} \quad &\leq \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + \\ &+ \quad \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|}\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\text{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y)|}{|x-y|}+\\
&+ \sup_{x\in E}|f(x)+g(x)| \le \\
&\le \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}+\sup_{x\in E}|f(x)|+\\
&+ \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}+\sup_{x\in E}|g(x)| =\\
&= \|f\|_{\text{Lip}}+\|g\|_{\text{Lip}}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo appena mostrato che $(\text{Lip}(E,\mathbb{R}^m),\ \|f\|_{\text{Lip}})$ è uno spazio normato. Ci manca da mostrare che è completo, cioè che ogni successione di Cauchy (rispetto alla norma sopra definita) converge ad un elemento nello spazio. Consideriamo $\{f_k\}_k$ una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $N_0=N_0(\varepsilon)>0$ tale che per ogni k, $h>N_0$ si abbia:

$$\begin{aligned}
\|f_k-f_h\|_{\text{Lip}} &= \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f_k(x)-f_h(x))-(f_k(y)-f_h(y))|}{|x-y|}+\\
&+ \sup_{x\in E}|f_k(x)-f_h(x)| \le \varepsilon\,. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Quindi la successione $\{f_k\}_k$ è una successione di Cauchy in[4]

$$(C(E,\mathbb{R}^m),\ \|\cdot\|_{\infty,E})$$

e di conseguenza (poichè tale spazio è completo) ammette un limite $f\in C(E,\mathbb{R}^m)$, cioè esiste un $N_1=N_1(\varepsilon)>0$ tale che se $k>N_1$ allora

$$\|f_k-f\|_{\infty,E}\le\varepsilon\,.$$

Da (1.1) ricaviamo che se x, $y\in E$ con $x\neq y$ e k, $h>N_0$ allora

$$\frac{|(f_k(x)-f_h(x))-(f_k(y)-f_h(y))|}{|x-y|}\le\varepsilon$$

da cui, passando al limite per $h\to+\infty$, otteniamo:

$$\frac{|(f_k(x)-f(x))-(f_k(y)-f(y))|}{|x-y|}\le\varepsilon\,.$$

[4]Denoteremo con $\|\cdot\|_{\infty,E}$ la *norma del sup*, cioè per ogni $f\in C(E,\mathbb{R}^m)$ intenderemo

$$\|f\|_{\infty,E}\equiv\sup_{x\in E}|f(x)|\,.$$

Poiché ciò è vero per ogni x, $y \in E$ possiamo concludere che se $k > N_0$ allora

$$\sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|(f_k(x) - f(x)) - (f_k(y) - f(y))|}{|x-y|} \leq \varepsilon\,.$$

Mettendo insieme le stime ottenute e definendo $N = N(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$, otteniamo che per $k > N$

$$\|f_k - f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2\varepsilon$$

cioè f è il limite di tale successione rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$.
Per concludere la dimostrazione, ci manca da mostrare che $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m)$. Infatti, fissando $k > N$ si ha:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f - f_k\|_{\mathrm{Lip}} + \|f_k\|_{\mathrm{Lip}} < \infty.$$

Esercizio 6.
Nota: Denoteremo con x gli elementi di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cioè le successioni a valori reali $x = \{x_n\}_n$. Con il pedice indicheremo un elemento di una di queste successioni, mentre useremo l'apice per indicare gli elementi di una successione in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ad esempio $\{x^{(k)}\}$ indica una successione i cui elementi $x^{(k)}$ sono delle successioni, cioè $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_n$).

1. Cominciamo col considerare lo spazio $(\ell^1,\ \|\cdot\|_1)$. Mostriamo che l'applicazione

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_1 \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \end{aligned}$$

è una norma su tale spazio.

- Chiaramente $\|x\|_1 \geq 0$ per ogni $x \in \ell^1$. Inoltre

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

  Quindi abbiamo mostrato la *positività* e la *non degenerazione.*

- Mostriamo l'*omogeneità*. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} \|ax\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a x_n| = \\ &= |a| \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |a|\, \|x\|_1\,. \end{aligned}$$

- Infine, facciamo vedere che vale la *disuguaglianza triangolare*. Siano x e y due successioni in ℓ^1. Allora:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n| + |y_n|) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 .\end{aligned}$$

  Osserviamo che il poter separare le due serie è giustificato dal fatto che queste convergono entrambe assolutamente.

Dobbiamo mostrare ora che tale spazio è completo. Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione di Cauchy in ℓ^1, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$ tale che se k, $h > N_0$ allora

$$\|x^{(k)} - x^{(h)}\|_1 \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon . \tag{1.2}$$

Ma quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, si ha

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon$$

e di conseguenza la successione $\{x_n^{(k)}\}_k$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi ammette un limite (per k che tende a $+\infty$) che indicheremo con x_n. Possiamo quindi considerare la successione dei limiti

$$x = \{x_n\}_n .$$

Mostriamo che x è il limite della successione $\{x^{(k)}\}_k$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.
Osserviamo che da (1.2) si ha che per ogni $M > 0$ e per k, $h > N_0$

$$\sum_{n=0}^{M} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \varepsilon ;$$

passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{M} |x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon$$

e, vista l'arbitrarietà di M, possiamo concludere che

$$\varepsilon \geq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n| = \|x^{(k)} - x\|_1$$

che è quanto volevamo mostrare. Per completare la dimostrazione, osserviamo che $x \in \ell^1$; infatti, se fissiamo un $k > N_0$ otteniamo:

$$\|x\|_1 \leq \|x - x^{(k)}\|_1 + \|x^{(k)}\|_1 < \infty.$$

Si procede in maniera analoga per dimostrare che $(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

2. Se $x \in \ell^1$ allora $\|x\|_\infty < \infty$ (altrimenti la serie $\sum_n |x_n|$ non potrebbe convergere!) e quindi $x \in \ell^\infty$. Abbiamo appena mostrato che

$$\ell^1 \subseteq \ell^\infty \ ;$$

d'altronde tale inclusione è stretta (cioè si tratta di un sottoinsieme proprio) come si verifica facilmente prendendo la successione

$$\tilde{x} = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\} \, ;$$

infatti tale successione ha norma $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ ma $\|\tilde{x}\|_1 = \infty$. Per mostrare che non si tratta di sottoinsieme chiuso, facciamo vedere che esiste una successione in ℓ^1 che converge (rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$) ad un elemeno che non sta in ℓ^1. Definiamo

$$x^{(k)} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, \ldots\right\}$$

e consideriamo la successione $\{x^{(k)}\}_k$. Questa successione ammette un limite rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ e tale limite è dato da

$$x = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right\} .$$

Infatti

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty = \frac{1}{k+1} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Osserviamo che $\|x\|_1 = \infty$ (è la serie armonica!) e questo completa la nostra dimostrazione.

3. Abbiamo appena mostrato che ℓ^1 non è un sottospazio chiuso di

$$(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty),$$

cioè rispetto alla topologia indotta da tale norma. Vogliamo determinare la chiusura di ℓ^1 (che indicheremo con $\overline{\ell^1}$) rispetto a tale topologia, cioè il più piccolo chiuso che lo contiene. Per far questo aggiungeremo a ℓ^1 tutti i suoi punti di accumulazione (abbiamo infatti visto nel punto precedente che esistono punti di accumulazione che sono esterni ad ℓ^1). Osserviamo che le successioni in ℓ^1 godono della proprietà di avere limite nullo (questa è infatti la condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_n |x_n|$); questa condizione è necessaria ma non sufficiente per stare in ℓ^1 (vedere il punto precedente). Quindi quello che ci si può aspettare è che l'insieme

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

sia proprio l'insieme che stavamo cercando.
Mostreremo i seguenti fatti:

a. $\mathcal{C}$ è chiuso ;
b. per ogni $x \in \mathcal{C}$ esiste una successione $\{x^{(k)}\} \subset \ell^1$ che converge a x nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

Osserviamo che il punto b ci dice proprio che si tratta del più piccolo chiuso contenente ℓ^1; infatti afferma che ogni punto di $\mathcal{C}$ è punto di accumulazione per ℓ^1, e quindi non può esistere un chiuso più piccolo che lo contenga. Diamo uno *sketch* della dimostrazione di questi punti.

a. Per mostrare che è chiuso, facciamo vedere che $\mathcal{C}$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Sia $\{x^{(k)}\}_k \subset \mathcal{C}$ una successione convergente e sia x il suo limite. Per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \le \varepsilon$$

per ogni $k > N_0$. Allora:

$$\begin{aligned} |x_n| &\le |x_n - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)}| \le \\ &\le \|x^{(k)} - x\|_\infty + |x_n^{(k)}| \le 2\varepsilon \end{aligned}$$

per n sufficientemente grande (in quanto $x_n^{(k)} \to 0$). Dall' arbitrarietà di ε otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathcal{C}\,.$$

b. Per mostrare questo punto si procede esattamente come abbiamo fatto nel punto 2. Data una successione $x \in \mathcal{C}$, costruiamo la successione $\{x^{(k)}\}$ così definita:

$$x^{(k)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots\}\,.$$

Chiaramente $\{x^{(k)}\} \subset \ell^1$. Mostriamo ora che x è il limite di tale successione rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. Poiché $x_n \to 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che

$$|x_n| \le \varepsilon$$

per ogni $n \ge N_0$. Quindi, prendendo $k \ge N_0$ si avrà

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \le \varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione.

Esercizio 7. Ricordiamo alcune definizioni che useremo in seguito.[5]

Definizione (Compattezza). *Uno spazio topologico X si dice* compatto *se ogni suo ricoprimento aperto (cioè costituito da insiemi aperti) possiede un sottoricoprimento finito, cioè possiede una sottofamiglia costituita da un numero finito di insiemi che è ancora un ricoprimento dello spazio.*

Definizione (Compattezza numerabile). *Uno spazio topologico X si dice* numerabilmente compatto *se ogni sottoinsieme infinito $Z \subset X$ possiede un punto di accumulazione.*

Definizione (Compattezza per successioni). *Uno spazio topologico X si dice* compatto per successioni *se ogni successione di elementi di X possiede una sottosuccessione convergente ad un elemento di X.*

Si dimostrano le seguenti relazioni fra queste definizione:

$$X \text{ compatto} \Rightarrow X \text{ numerabilmente compatto} \Leftarrow X \text{ compatto per successioni.}$$

Nessuna delle implicazioni precedenti è - in generale - un'equivalenza. Si può però dimostrare in generale il seguente risultato:

Teorema. *Sia X uno spazio metrizzabile. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è compatto.

(b) X è numerabilmente compatto.

(c) X è compatto per successioni.

Torniamo ora al nostro esercizio.

(i) Mostriamo che l'insieme Ω non è compatto. Poiché stiamo considerando uno spazio normato (e quindi metrico) la definizione di compattezza è equivalente alla definizione di compattezza per successioni. Facciamo vedere quindi che esiste una successione in Ω che non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Consideriamo la successione $\{x^{(n)}\}_n$ così definita:
$$x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)\,.$$

Se prendiamo due generici elementi della successione $x^{(n)}$ ed $x^{(m)}$, con $n \neq m$, si osserva che la loro distanza (nella metrica indotta dalla norma) è costante, cioè
$$d\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) \quad = \quad \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 = 2$$
e quindi non è possibile estrarre alcuna sottosuccesione convergente.

[5]Cfr. E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri (1994).

(ii) Anche in questo caso è più semplice mostrare la compattezza per successioni. Supponiamo di avere una successione $\{x^{(n)}\}_n$ in D e facciamo vedere che è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Possiamo considerare la naturale immersione di D in $\mathbb{R}^{10}$

$$\begin{array}{rcl} i : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^{10} \\ x & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_{10}) \end{array}$$

ed osservare che $i(D)$ è la palla unitaria in $\mathbb{R}^{10}$, rispetto alla $\| \cdot \|_\infty$; in particolare

$$i : D \longrightarrow i(D)$$

è una biezione.
Quindi è possibile associare alla successione $\{x^{(n)}\}_n$ una sottosuccessione $\{y^{(n)}\}_n$ in $i(D)$, data da $y^{(n)} = i(x^{(n)})$.
Osserviamo che $i(D)$ è compatto in $(\mathbb{R}^{10}, \| \cdot \|_\infty)$ e quindi è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione $\{y_{n_k}\}_k$, convergente ad un certo $y \in i(D)$, i.e:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 = N_0(\varepsilon) \quad \text{t.c.} \quad \text{se} \quad k \geq N_0 \quad \text{allora} \quad \|y^{(n_k)} - y\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Mostriamo che la sottosuccessione $\{x^{(n_k)}\}_k$, data da

$$x^{(n_k)} = i^{-1}(y^{(n_k)})$$

è una successione convergente in $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$, e che converge ad un limite $x = i^{-1}(y) \in D$. Infatti, se $k \geq N_0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \|x^{(n_k)} - x\|_1 &= \sum_{j=1}^{10} |x_j^{(n_k)} - x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^{10} |y_j^{(n_k)} - y_j| \leq \\ &\leq n\|y^{(n_k)} - y\|_\infty \leq n\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Inoltre $x \in D$ per come è stata definita.

1.2 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$: regolarità, polinomio di Taylor, estremi liberi e vincolati, etc ...

Esercizio 8. Per mostrare che tale funzione non è continua in $O = (0, .., 0)$, è sufficiente [6] trovare due successioni $x^{(k)}$, $y^{(k)} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, t.c.

[6] [C], proposizione 5.8 i)

$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} y^{(k)} = O$, ma $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) \neq lim_{k\to+\infty} f(y^{(k)})$.
Consideriamo ad esempio le successioni:
$x^{(k)} = (0,..,\frac{1}{k},..0)$ (cioè ha componenti $x_j^{(k} = \frac{\delta_{i,j}}{k}$, $j = 1,..,n$)
$y^{(k)} = (0,..,\frac{-1}{k},..0)$ (cioè ha componenti $y_j^{(k} = \frac{-\delta_{i,j}}{k}$, $j = 1,..,n$)

Esercizio 9.

1. Nel caso $x_0 = (0,1,1,2)$ si ha $\delta(\epsilon) = \min\{\frac{\epsilon}{5\alpha}, |x_0| - 1\}$;
   Nel caso $x_0 = (0,0,.,0)$ si ha $\delta(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}$;
2. $\delta(\epsilon) = \min\{\frac{\epsilon}{38}, \frac{1}{2}\}$;
3. $\delta(\epsilon) = \min\{(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{n}}, \epsilon^{\frac{1}{2n}}\}$; [7]
4. $\delta(\epsilon) = \min\{\frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{n^{\frac{5}{2}} e^{-4n}\epsilon}{12}\}$; [8]
5. $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$;
6. $\delta(\epsilon) = \min\{\frac{\epsilon}{n}, \frac{\epsilon}{5\alpha\sqrt{n}}, |x_0| - 1\}$.

Esercizio 10. E' sufficiente considerare $\delta(\epsilon) = (\sin 3)\epsilon$.

Esercizio 11.
<u>Nota</u>: In tale contesto $|\cdot|$ indica la norma euclidea, sia su $\mathbb{R}^4$ che su $\mathbb{R}^2$. Utilizzando le relazioni di equivalenza fra le varie norme si possono ottenere immediatamente i moduli di continuità associati alle altre combinazioni di norme definibili su tali spazi.

Trovare il modulo di continuità in $x_0 = (0,0,0,0)$, equivale a trovare un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $|x| \leq \delta$, allora

$$|f(x) - f(0)| = \left|\left(\frac{1}{1+|x|} - 1,\ \sin(x_1x_4)\right)\right| \leq \varepsilon .$$

Cominciamo stimando separatamente le varie componenti di questo vettore.

- Prima componente:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{1+|x|} - 1\right| &= \left|\frac{1-1-|x|}{1+|x|}\right| = \\ &= \frac{|x|}{1+|x|} \leq \\ &\leq |x| \leq \delta . \end{aligned}$$

[7] Si può dimostrare che se $\frac{-\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ allora vale la seguente disuguaglianza: $\cos t \geq \frac{1}{\sqrt{1+2\sin^2 t}}$

[8] Osservare che si tratta di una serie geometrica

- Seconda componente:

$$|\sin(x_1x_4)| \leq |x_1x_4| \leq |x|^2 \leq \delta^2\,;$$

abbiamo usato che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e che $|x_i| \leq |x|$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.

Mettendo insieme le varie stime otteniamo:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| &= \left|\left(\frac{1}{1+|x|} - 1,\ \sin(x_1x_4)\right)\right| \leq \\
&\leq \sqrt{2}\max\left\{\left|\frac{1}{1+|x|} - 1\right|,\ |\sin(x_1x_4)|\right\} \leq \\
&\leq \sqrt{2}\max\left\{\delta,\ \delta^2\right\}\,.
\end{aligned}$$

Assumendo che $\delta \leq 1$ possiamo semplificare tale espressione:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| &\leq \sqrt{2}\max\left\{\delta,\ \delta^2\right\} = \\
&= \sqrt{2}\delta\,.
\end{aligned}$$

Quindi sarà sufficiente prendere

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ 1\right\}\,.$$

Esercizio 12. Consideriamo una funzione

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ e sia $x_0 \in E$. Vogliamo mostrare che

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_i \text{ è continua in } x_0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m\,.$$

Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Osserviamo che anche in questo caso considereremo la norma euclidea su entrambi gli spazi: questa non è una scelta restrittiva in quanto le norme su spazi vettoriali di dimensione finita sono tra loro equivalenti (cioè inducono la stessa topologia) e quindi le proprietà topologiche (quali la continuità) non dipendono dalle norme scelte.

($\Longrightarrow$) Supponiamo che f sia continua in x_0, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Quindi è sufficiente osservare che per ogni $i = 1, \ldots, m$

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

per poter concludere la tesi.

($\Longleftarrow$) Assumiamo che per ogni $i = 1, \ldots, m$ le funzioni f_i siano continue in x_0, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0 \,: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\,.$$

La tesi segue facilmente prendendo

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_m(\varepsilon)\}\ ;$$

infatti con tale scelta si ha che se $|x - x_0| \le \delta$, allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0| &\le \sqrt{m} \max_{i=1,\ldots,m} \{|f_i(x) - f_i(x_0)|\} \le \\ &\le \sqrt{m}\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Esercizio 13.
Nota: In tale contesto $|\cdot|$ indicherà la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$.

(i) Siano $x,\ y \in B_1(0)$. Consideriamo separatamente le due componenti di

$$f(x) - f(y) = \left(\frac{1}{2 - |x|} - \frac{1}{2 - |y|},\ \left|\sin\prod_{i=1}^n x_i\right| - \left|\sin\prod_{i=1}^n y_i\right|\right)\,.$$

Prima componente:[9]

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2 - |x|} - \frac{1}{2 - |y|}\right| &= \left|\frac{2 - |y| - 2 + |x|}{(2 - |x|)(2 - |y|))}\right| = \frac{|\,|x| - |y|\,|}{(2 - |x|)(2 - |y|)} \le \\ &\le \frac{|x - y|}{(2 - |x|)(2 - |y|)} \le |x - y|\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che questa stima è ottimale. Infatti, se consideriamo (al variare di m in $\mathbb{N}$) i punti

$$\begin{aligned} x_m &= \left(1 - \frac{1}{2m},\ 0,\ \ldots,\ 0\right) \\ y_m &= \left(1 - \frac{1}{m},\ 0,\ \ldots,\ 0\right) \end{aligned}$$

[9] Utilizzeremo i seguenti fatti:

1. $|\,|x| - |y|\,| \le |x - y|$, per ogni $x,\ y \in \mathbb{R}^n$;
2. $2 - |x| \ge 1$, per ogni $x \in B_1(0)$.

otteniamo:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2-|x_m|}-\frac{1}{2-|y_m|}\right| &= \left|\frac{1}{2-1+\frac{1}{2m}}-\frac{1}{2-1+\frac{1}{m}}\right| = \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}}-\frac{1}{1+\frac{1}{m}} = \\
&= \frac{2m}{(1+2m)}-\frac{m}{(1+m)} = \\
&= \frac{m}{(2m+1)(m+1)} = \\
&= \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)}\frac{1}{2m} = \\
&= \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)}|x_m-y_m|\,.
\end{aligned}$$

Quindi la costante L_m che rende *sharp* la disuguaglianza sopra (nel caso x_m e y_m) è data da

$$L_m := \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

e di conseguenza $L \geq 1$.

Seconda componente:[10]

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sin\prod_{i=1}^n x_i\right|-\left|\sin\prod_{i=1}^n y_i\right|\right| &\leq \left|\sin\prod_{i=1}^n x_i-\sin\prod_{i=1}^n y_i\right| \leq \left|\prod_{i=1}^n x_i-\prod_{i=1}^n y_i\right| \leq \\
&\leq \left|x_1\prod_{i=2}^n x_i - x_1\prod_{i=2}^n y_i + x_1\prod_{i=2}^n y_i - y_1\prod_{i=2}^n y_i\right| \leq \\
&\leq |x_1|\left|\prod_{i=2}^n x_i-\prod_{i=2}^n y_i\right| + \left|\prod_{i=2}^n y_i\right||x_1-y_1| \leq \\
&\leq |x_1-y_1| + \left|\prod_{i=2}^n x_i-\prod_{i=2}^n y_i\right| \leq \\
&\leq \ldots \leq \\
&\leq |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n| = \\
&= \|x-y\|_1 \leq \\
&\leq \sqrt{n}\,|x-y|\,.
\end{aligned}$$

[10] Utilizzeremo i seguenti fatti:

1. $|\,|x|-|y|\,| \leq |x-y|$, per ogni $x,\ y\ \in \mathbb{R}^n$;
2. $|\sin t - \sin s| \leq |t-s|$, per ogni $t,\ s\ \in \mathbb{R}$;
3. $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}|x|$, per ogni $x\ \in \mathbb{R}^n$.

Mettendo insieme le due stime precedenti, otteniamo:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2-|x|}-\frac{1}{2-|y|}\right)^2+\left(\left|\sin\prod_{i=1}^n x_i\right|-\left|\sin\prod_{i=1}^n y_i\right|\right)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{|x-y|^2+n|x-y|^2}=\sqrt{n+1}\,|x-y|\,.\end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L=\sqrt{n+1}\,.$$

(ii) Prendiamo innanzitutto in esame il caso in cui

$$\Omega = B_1(x_0)$$

con $x_0=(2,\ldots,2)$.
Facciamo delle osservazioni preliminari. Se $x\in\Omega$ allora

$$2\sqrt{n}-1\leq|x|\leq 2\sqrt{n}+1$$

e quindi

$$\alpha_n := 2-\sqrt{2\sqrt{n}+1}\leq 2-|x|^{\frac{1}{2}}\leq 2-\sqrt{2\sqrt{n}-1}=:\beta_n\,.$$

Osserviamo che:

1. Se $n=1,2$ allora $\alpha_n,\ \beta_n>0$.
2. Se $n=3,4,5,6$ allora $\alpha_n<0<\beta_n$, quindi la funzione f presenta una singolarità nel dominio Ω. In particolare se $n=4$ tale singolarità è proprio in x_0.
3. Se $n\geq 7$ allora $\alpha_n,\ \beta_n<0$.

Considereremo quindi $n\neq 3,4,5,6$. In tali casi avremo la seguente stima:

$$\alpha_n^2\leq(2-|x|^{\frac{1}{2}})(2-|y|^{\frac{1}{2}})\leq\beta_n^2\,.$$

Infine notiamo che in $I_n=(2\sqrt{n}-1,2\sqrt{n}+1)$ la funzione *radice quadrata* è lipschitziana. Questa è una semplice conseguenza del teorema di Lagrange; infatti se $s,\ t\in I_n$ allora

$$\begin{aligned}|\sqrt{s}-\sqrt{t}| &\leq \left(\sup_{\xi\in I_n}\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\right)|s-t| = \\ &= \frac{1}{2(2\sqrt{n}-1)}|s-t|\,.\end{aligned}$$

Possiamo ora mostrare la stima cercata. Siano $x, y \in B_1(x_0)$, allora:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2-|x|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2-|y|^{\frac{1}{2}}}\right| &= \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\,|}{|(2-|x|^{\frac{1}{2}})(2-|y|^{\frac{1}{2}})|} \leq \\
&\leq \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|}{\alpha_n^2} \leq \\
&\leq \frac{||x|-|y||}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n}-1)} \leq \\
&\leq \frac{1}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n}-1)}|x-y|\,.
\end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L = \frac{1}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n}-1)}\,.$$

Passiamo ora a considerare il caso in cui

$$\Omega = B_1(0)\,.$$

Mostriamo che in questo caso non esiste una costante L che soddisfa la condizione richiesta. Consideriamo infatti i seguenti punti (al variare di m in $\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
x_m &= \left(\frac{1}{n^2}, 0, \ldots, 0\right) \\
y_m &= \left(\frac{1}{4n^2}, 0, \ldots, 0\right)\,.
\end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
|f(x_m) - f(y_m)| &= \left|\frac{1}{2-\sqrt{|x_m|}} - \frac{1}{2-\sqrt{|y_m|}}\right| = \\
&= \left|\frac{1}{2-\sqrt{\frac{1}{m^2}}} - \frac{1}{2-\sqrt{\frac{1}{4m^2}}}\right| = \\
&= \left|\frac{1}{2-\frac{1}{m}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2m}}\right| = \\
&= \left|\frac{m}{2m-1} - \frac{2m}{4m-1}\right| = \\
&= \frac{m}{(2m-1)(4m-1)} = \\
&= \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)}\frac{3}{4m^2} = \\
&= \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)}|x_m - y_m|\,.
\end{aligned}$$

Se esistesse una costante L con le proprietà richieste, si dovrebbe avere:

$$L \geq L_m := \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)} \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e questo conclude la dimostrazione della *non esistenza* di una simile L.

(iii) Siano $x,\, y \in B_r(0)$, con $r > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| e^{|x|^2}x - e^{|y|^2}y \right| \leq \\ &\leq \left| e^{|x|^2}x - e^{|x|^2}y \right| + \left| e^{|x|^2}y - e^{|y|^2}y \right| \leq \\ &\leq e^{|x|^2}|x-y| + |y||e^{|x|^2} - e^{|y|^2}| \leq \\ &\leq e^{r^2}|x-y| + re^{r^2}(|x|+|y|)\,|\,|x|-|y|\,| \leq \\ &\leq e^{r^2}(1+2r^2)|x-y|\,. \end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L = e^{r^2}(1+2r^2)\,.$$

Esercizio 14. Osserviamo che la funzione che abbiamo definito è ovviamente discontinua nell'origine; nonostante ciò si ha l'esistenza di tutte le derivate direzionale $\forall\, \xi = (\xi_1\,, \xi_2\,) \neq (0,0)$; ciò segue immediatemente dalla definizione di derivata direzionale, osservando che $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, |t| < \delta\ (t\xi_1)^2 \neq t\xi_2\,.$

Esercizio 15. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ Si ha che: $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}(0) = \alpha |x|^{\alpha-2}x_i$.

Esercizio 16. Le condizioni da imporre su α e β sono le seguenti:

1. $2\alpha - \beta > 0$;
2. $2\alpha - \beta > 1$;
3. $2\alpha - \beta > 1$;
4. $2\alpha - \beta > 1$.

Esercizio 17. Per la definizione di differenziabilità di funzioni vettoriali ([C] Def. 5.46), facciamo vedere che:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0$$

Usando il fatto che le funzioni componenti sono $\mathcal{C}^1$ e quindi differenziabili, e che l'operatore lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è individuato dall matrice Jacobiana di f, segue la tesi.

Esercizio 18.

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ y^2 e^{xy^2} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{pmatrix} x\cos(xy) \\ 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L(h)|}{|h|} = 0\,, \tag{1.3}$$

dove

$$\begin{aligned}L(h) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cominciamo col fornire una stima del numeratore che compare nell'espressione in (1.3). Stimiamo separatamente le due componenti del vettore di cui stiamo calcolando la norma (euclidea):

- Prima componente:

$$\begin{aligned}&|\sin(h_1h_2)| \leq \\ &\leq |h_1h_2| \\ &\leq |h|^2\,.\end{aligned}$$

- Seconda componente (non è restrittivo assumere che $|h| \leq 1$, in quanto poi andremo a considerare il limite per $|h| \to 0$):

$$\begin{aligned}&\left|e^{h_1h_2^2}-1\right| \leq \\ &\leq 3\left|h_1h_2^2\right| \leq \\ &\leq 3\,|h|^3 \leq \\ &\leq 3\,|h|^2\,.\end{aligned}$$

Quindi otterremo la seguente stima:

$$\begin{aligned}&\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L(h)|}{|h|} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{10}\,|h|^2}{|h|} = \\ &= \sqrt{10}\,|h| \overset{h\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

3. Applicando la regola per la differenziazione di funzioni composte otteniamo:

$$F'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), 1-g^2(t))g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), 1-g^2(t))(-2g(t)g'(t))\,.$$

Osservando che:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ g'(t) &= \frac{1}{\cosh^2 t} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ g'(0) &= 1 \end{aligned}$$

ed usando le espressioni ricavate nel punto 1), otteniamo:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 19. Applicando la regola di differenziazione delle funzioni composte si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, h(x,z), z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x,z), z) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x,z), z)\, \frac{\partial h}{\partial x}(x,z) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x,z), z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x,z), z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, h(x,z), z) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, h(x,z), z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, h(x,z), z) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x,z), z)\, \frac{\partial h}{\partial z}(x,z) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, h(x,z), z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x,z), z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, h(x,z), z) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 20.

1. Sia $y = f(x)$ una soluzione C^2 in un intorno di $x = 0$, dell'equazione

$$x^2 + \sinh y + e^{xy} = 1\,,$$

tale che $f(0) = 0$. Quindi la funzione

$$F(x) \equiv x^2 + \sinh f(x) + e^{xf(x)} - 1 \equiv 0$$

e di conseguenza anche tutte le sue derivate saranno indenticamente nulle (in quanto si tratta di una funzione costante). In particolare usando il fatto che $f(0) = 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 = F'(0) &= \Big[2x + (\cosh f(x))f'(x) + e^{xf(x)}(f(x) + xf'(x))\Big]_{|x=0} = \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

cioè $x = 0$ è un punto critico per tale funzione. Studiamo la derivata seconda in modo da determinare la natura di tale punto critico:

$$\begin{aligned} 0 = F''(0) &= \Big[2 + (\sinh f(x))(f'(x))^2 + (\cosh f(x))f''(x) + \\ &+ e^{xf(x)}\big((f(x) + xf'(x))^2 + 2f'(x) + xf''(x)\big)\Big]_{|x=0} = \\ &= 2 + f''(0)\,, \end{aligned}$$

e quindi $f''(0) = -2$, cioè si tratta di un punto di massimo relativo.

2. L'esistenza di una simile funzione è garantita dal Teorema della funzione implicita, in quanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) &= [\cosh y + xe^{xy}]_{|(x,y)=(0,0)} = \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 21. 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial y_1} & \frac{\partial f_6}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, g(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} g_j'(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_6}{\partial y_j} g_j'(t) \end{pmatrix}$$

Esercizio 22. 1.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{1+t} & \frac{2y_2x_3}{1+t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} t\cos(tx_1) & 0 & 0 \\ \frac{x_1}{|x|} & \frac{x_2}{|x|} & \frac{x_3}{|x|} \\ 0 & 0 & \frac{y_2^2}{1+t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \begin{pmatrix} x_1\cos(tx_1) \\ |x| \\ -\frac{y_1+y_2^2x_3}{(1+t)^2} \end{pmatrix}$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\, f(x,g(t),t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,g(t),t), g'(t) \;+\; \frac{\partial f}{\partial t}\,(x,g(t),t) \;=$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\cos(tx_1) \\ |x| \\ \frac{1}{(1+t)\cosh^2 t} + \frac{2\ln(\ln t)x_3}{(1+t)t\ln t} - \frac{\tanh t + x_3\ln^2(\ln t)}{(1+t)^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 23. 1. $D^1 f(0)(\xi) \;=\; \nabla f(0)\,\xi \;=\; (1,0,..,0)\,\xi \;=\; \xi_1\,;$
$D^3 f(0)(1,2,..,n)^3 \;=\; 6\sum_{j=1}^n j^2 \;= n(n+1)(2n+1)\,;$

2. $\frac{\partial^5 f}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_5}(1,1,..,1) = (2^5 x_1x_2x_3x_4x_5 e^{|x|^2}(x_1+x_n^4)+2^4x_2x_3x_4x_5e^{|x|^2})_{|(1,..,1)} =$
$= 90\,e^n\,;$

3. $\partial_x^{(1,0,..,10)}\, f(0) \;=\; 30240$
$\partial_x^{(1,0,..,10)}\, f((-1,1,..,(-1)^n)) \;= -(99050016)e^n$ [11]

4. $\nabla f(0) \;=\; (1,0,..,0)\,.$

Esercizio 24. 1. $f \;\in\; \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) \mid\; x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,\}\,)\,;$

2. Basta prendere ad esempio $\delta \;=\; \min\{\frac{1}{2}\,,\;\frac{\epsilon}{\sqrt{2}\,e}\}\,;$

3. La funzione è differenziabile nell'origine;

[11] $\frac{\partial^{10}}{\partial x_n^{10}}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,(e^{|x|^2}(x_1+x_n^4)) \;=\; e^{x_1^2+..+x_{n-1}^2}\,\frac{\partial^{10}}{\partial x_n^{10}}(e^{x_n^2}(1+2x_1^2+2x_1x_n^4)) \;=\; (*)\;.$
Chiamiamo $c = e^{x_1^2+..+x_{n-1}^2}$, $a = 1+2x_1^2$, $b = 2x_1x_n^4$, $f(t) = (1+bt^4)$ e $g(t) = e^{t^2}$.
Allora $(*) \;=\; c\sum_{k=0}^{10}(\frac{10!}{k!(10-k)!}\,D^k(f)D^{10-k}(g)) \;=\; c\sum_{k=0}^{4}(\frac{10!}{k!(10-k)!}\,D^k(f)D^{10-k}(g))$ in quanto $D^k f\; = 0$ se $k>4$.
Si dimostra per induzione che $D^j(g) \;=\; e^{t^2}P_j(t)$ dove $P_j(t)$ è un polinomio di grado j nella t, così definito: $P_0(t) = 1$ e $P_{k+1}(t) = P_k'(t) + 2tP_k(t)$.

4. $\forall\, k \geq 0$ di ha che $f \notin \mathcal{C}^k(\{0\})$. Infatti dal punto 1) segue che non è continua in un qualsiasi intorno dell'origine; osserviamo invece che $f \in \mathcal{C}^2(0)$.

Esercizio 25. $\mathcal{P}_6(x;0) = x_1 + x_1x_2x_3x_4 + o(|x|^6)$.

Esercizio 26. 1. $\mathcal{P}_3(x;0) = x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + \frac{x_1^2x_3}{2} + \frac{x_2^2x_3}{2} + x_1x_2x_3 + o(|x|^6)$;

2. Si può prendere ad esempio $\delta = \frac{1}{4e}$.

Esercizio 27. Ovviamente $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$; d'altro canto $\lim_{|x|\to 0} \frac{\sin|x|}{|x|} = 1$, quindi
$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e tutte le sue derivate parziali in 0 valgono 0; da ciò si dimostra facilmente che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 28. Sia $\mathcal{R}^* \equiv \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}^*)$ e in tale insieme è anche differenziabile; inoltre f non è continua nei punti di $\mathcal{R}^*$ e in tali punti non esistono le derivate parziali.

Esercizio 29. I punti critici della funzione sono: $P_1 = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e $P_2 = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$. Entrambi sono dei punti nè di massimo nè di minimo.
Osserviamo che $\sup f = +\infty$, mentre $\inf f = -\infty$.

Esercizio 30. Cominciamo con l'osservare che la funzione è continua su $\mathcal{D}$ che è compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti.
I punti critici della funzione interni al dominio sono i punti sull'asse delle y: $P_y = (0,y)$ $(-1 \leq y \leq 1)$ e in tali punti la funzione è identicamente nulla.

- I punti P_y con $0 < y \leq 1$ sono dei punti di minimo locale per la funzione;
- I punti P_y con $1 \leq y < 0$ sono dei punti di massimo locale per la funzione;
- L'origine P_0 è un punto di sella.

. Studiando il comportamento della funzione sul bordo $\partial\mathcal{D} \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}$, ci si rende conto che la funzione assume:

- Massimo in $M_1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $M_2 = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
  In particolare si ha che $f(M_{1,2}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$;
- Minimo in $m_1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $m_2 = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.
  In particolare si ha che $f(m_{1,2}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

Quindi riassumendo: $\max_{\mathcal{D}} f = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e $\min_{\mathcal{D}} f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 31. $\frac{\partial}{\partial x_i} g(|x|) = g'(|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = g'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$. Quindi $\nabla g(|x|) = g'(|x|)\frac{x}{|x|}$.

Esercizio 32. 1.

$$P_{1000}(s,t;1,0) = \sum_{\alpha \in N^2 \ |\alpha|=1}^{1000} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+1} \frac{(\alpha_1+\alpha_2-1)!}{\alpha_1!\alpha_2!}(s-1)^{\alpha_1} t^{\alpha_2}$$

2.

$$P_{1000}(x,y;1,0) = \sum_{\beta \in N^2 \ |\beta|=1}^{1000} a_\beta (x-1)^{\beta_1} y^{\beta_2}$$

con

$$a_\beta = \begin{cases} (-1)^{\beta_1+1} \frac{(\beta_1 + \frac{\beta_2}{2} - 1)!}{\beta_1!(\frac{\beta_2}{2})!} & \text{se } \beta_2 \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } \beta_2 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esercizio 33. 1. Ovviamente $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 1\})$; quindi bisogna dimostrare che nei punti $\{(1,y), y \neq 0\}$ esistono le derivate di ogni ordine, e che sono continue.
Si procede per induzione sull'ordine di derivazione, osservando che se $x \neq 1$ $\frac{\partial^n f}{\partial x^h \partial y^k}$ è sempre del tipo: $e^{-(\frac{y}{x-1})^2} \frac{P(y,x-1)}{Q(x-1)}$, dove P e Q sono dei polinomi nelle variabili y e x-1, tali che $\lim_{x\to 1} Q(x-1) = 0$; da ciò segue che in tali punti le derivate di ogni ordine sono nulle e partendo da ciò si dimostra facilmente la continuità delle derivate su tale insieme.

2. In tale punto, la funzione è continua ed esistono entrambe le derivate parziali e non è differenziabile; ma le derivate parziali non sono continue (non esiste proprio il limite per $x \to 1$!);

3. I punti critici sono del tipo $P_y \equiv (1,y)$; Si vede facilmente da uno studio del segno della funzione f, che se $y > 0$ si tratta di un punto di minimo, mentre se $y < 0$ si tratta di un punto di massimo locale (ovviamente non sono assoluti in quanto ci sono punti in cui la funzione assume valori strettamente positivi e strettamente negativi!); Per $y = 0$ abbiamo un punto di sella. (attenzione: Nella ricerca dei punti critici il punto $(1,0)$, va studiato a parte, in quanto la funzione non è C^1 in alcun intorno di tale punto);

4. Basta prendere in entrambi i casi $\delta = \frac{1}{100}$.

Esercizio 34. 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f = 2f(x)\,x$.Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \prod_{j \neq i} (x_j^2) = 2x_i\, f(x)\,;$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 & 0 & \dots & 0 \\ -x_2 \sin(x_1 x_2) & -x_1 \sin(x_1 x_2) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{z-x^2}$.

Osservazione: Nel primo caso si tratta di un gradiente, nel secondo di uno jacobiano e ne terzo di una derivata parziale.

Esercizio 35.

$$P_N(x; x_0) = \sum_{\beta \in N^n \ |\beta|=1}^{N} a_\beta (x)^\beta$$

con

$$a_\beta = \begin{cases} (-1)^{|\frac{\beta}{2}|-1} \frac{|\frac{\beta}{2}|!}{(|\beta|-1)!\,(\frac{\beta}{2})!} & \text{se } \beta_i \text{ è pari } \forall i = 1..n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 36. Consideriamo la funzione $G(x, y, t) \equiv t^3 - 2xy + y$ e supponiamo che esista una funzione $z = z(x, y)$ definita in un intorno del punto $(1, 1)$, tale che $G(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ e $z(1, 1) = 1$. Ovviamente questa nuova funzione è una funzione delle sole variabili (x, y), che è identicamente nulla nell'insieme di definizione della z. Quindi tutte le sue derivate saranno identicamente nulle in tale intorno. Calcoliamocele applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte:
$0 = \frac{\partial G(x,y,z(x,y))}{\partial x}{}_{|(1,1)} = (\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial G}{\partial t}(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial x}(x, y))_{|(1,1)} = (-2y + 3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y))_{|(1,1)} = -2 + 3\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)\,.$
Da cui segue che : $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{3}$.
(Si procede in maniera analoga per la derivata parziale rispetto alla y e per le derivate seconde)
$P_2(x, y; 1, 1) = 1 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) - \frac{4}{9}(x-1)^2 - \frac{1}{9}(y-1)^2 + \frac{2}{9}(x-1)(y-1)$.
Facoltativo: Nel primo caso si procede esattamente come sopra, scegliendo come $G(x, y, t) = t^3 - 2xy + t$. Nel secondo caso, invece, se si procede come sopra, si giunge immediatamente ad un assurdo (Quale?). Questo semplicemente per il fatto che non può esistere alcuna funzione z che soddisfi tali condizioni nell'intorno del punto (1,1). (Lo vedremo meglio parlando del teorema delle funzioni implicite).

Esercizio 37. E' utile studiare separatamente le due funzioni $\overline{s}(x,y) \equiv x^2 s(x)$ e $\overline{c}(x,y) \equiv y^2 s(y)$.
Si verifica facilmente che tali funzioni sono continue e differenziabili dappertutto ma le derivate parziali non sono continue nei punti (rispettivamente) con $x = 0$ o $y = 0$.
Da ciò segue che $f(x,y) = \overline{s}(x,y) + \overline{c}(x,y)$ è continua dappertutto (in quanto somma di funzioni continue), differenziabile ovunque (in quanto somma di funzioni differenziabili ovunque) e con derivate parziali che esistono in ogni punto, ma che non sono continue sui punti sull'asse delle x o sull'asse delle y. (A tal proposito è bene sottolineare, che in generale la somma di funzioni discontinue non è una funzione discontinua! Nel nostro caso, possiamo giungere a tale conclusione soltanto perchè f è a variabili separate: $f(x,y) = x^2 s(x) + y^2 c(y)$ e quindi una discontinuità dell'una non può venir compensata da una discontinuità dell'altra).

Esercizio 38. Cominciamo con l'osservare che la funzione è continua su $\mathcal{D}$ che è compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti.
I punti critici della funzione interni al dominio sono i punti sull'asse delle y: $P_y = (0,y)$ $(-1 \le y \le 1)$ e in tali punti la funzione è identicamente nulla.

- I punti P_y con $0 < y \le 1$ sono dei punti di minimo locale per la funzione;
- I punti P_y con $1 \le y < 0$ sono dei punti di massimo locale per la funzione;
- L'origine P_0 è un punto di sella.

Studiando il comportamento della funzione sul bordo $\partial\mathcal{D} \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}$, (con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange) ci si rende conto che la funzione assume:

- Massimo in $M_1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $M_2 = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
  In particolare si ha che $f(M_{1,2}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$;
- Minimo in $m_1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $m_2 = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.
  In particolare si ha che $f(m_{1,2}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

Quindi riassumendo: $\max_{\mathcal{D}} f = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e $\min_{\mathcal{D}} f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 39. Cominciamo col formalizzare il problema. Osserviamo innanzitutto che (a meno di rotazioni) possiamo considerare solamente i rettangoli che hanno i lati paralleli agli assi coordinati; inoltre tali rettangoli saranno simmetrici rispetto agli assi delle x e delle y. Quindi, indicando con (x,y) le coordinate del vertice del rettangolo nel semipiano $\Pi^+ \equiv \{x \ge 0\,,\; y \ge 0\}$, otteniamo che la funzione da massimizzare (che rappresenta l'area del rettangolo) è data da:

$$f(x,y) = 4xy\,.$$

Individuiamo ora il vincolo, cioè le condizioni che il punto (x, y) deve soddisfare:

- innanzitutto si dovrà avere $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (in quanto abbiamo supposto che $(x, y) \in \Pi^+$);
- inoltre tale punto dovrà stare sulla circonferenza di raggio R, cioè:

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Quindi il vincolo sarà dato da:

$$V \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \quad x^2 + y^2 = R^2\} .$$

Tale vincolo rappresenta un quarto di circonferenza di raggio R (la parte in Π^+); inoltre negli estremi di tale curva (cioè nei punti corrispondenti a $x = 0$ o $y = 0$) la funzione f si annulla, e quindi tali punti non possono corrispondere a dei punti massimizzanti.
Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione

$$F(x, y, \lambda) = 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$$

e cerchiamone i punti critici. Imponendo l'annullamento del gradiente otteniamo:

$$\begin{aligned}
\partial_x F(x, y, \lambda) &= 4y + 2\lambda x = 0 \\
\partial_y F(x, y, \lambda) &= 4x + 2\lambda y = 0 \\
\partial_\lambda F(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - R^2 = 0
\end{aligned}$$

troviamo che l'unico punto critico con $x > 0$ e $y > 0$, è dato da

$$P = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \ \frac{R}{\sqrt{2}}, \ \lambda = -2\right) .$$

Quindi il rettangolo inscritto con area massima è (a meno di rotazioni) quello con vertici:

$$P_1 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right), \ P_2 = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right), \ P_3 = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right), \ P_4 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

che ha area $A = \dfrac{R^2}{2}$.

Esercizio 40.

1. La funzione non è limitata né inferiormente, né superiormente su $\mathbb{R}^2$. Infatti, se studiamo il comportamento della f sulla retta $y = x$, otteniamo:

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, x) = \lim_{x \to \pm\infty} x - x^3 = \pm\infty ;$$

   quindi

   $$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \qquad \text{e} \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty .$$

2. Imponendo l'annullamento del gradiente della f otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 2x - y^2 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0\,. \end{cases}$$

Tale punto non è né di massimo, né di minimo. Infatti $f(0,0) = 0$, ma in ogni intorno (arbitrariamente piccolo) dell'origine, la funzione assume sia valori positivi che negativi. Ad esempio in $B_\delta(0,0)$, con $0 < \delta < 1$, possiamo considerare i punti

$$P_1 = \left(\delta^2, \frac{\delta}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)\;;$$

in tali punti si ha:

$$f(P_1) = -\frac{3}{4}\delta^2 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{8} > 0\,.$$

3. K è la regione del piano delimitata dalle rette $x = \pm\frac{1}{2}$ e da due archi della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; in particolare i suoi "vertici" sono nei punti:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

In particolare in tali punti si ha:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(C) = \frac{5}{8} \\ f(B) &= f(D) = -\frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

Studiamo la funzione sui "lati verticali", cioè sulle rette

$$L_\pm = \left\{x = \pm\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\,.$$

- Su L_+:

$$\begin{aligned} f_+(y) &= f(x,y)_{|L+} = f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y^2 \\ f'_+(y) &= -y \end{aligned}$$

  quindi si ha un punto di massimo locale in $E = (\frac{1}{2}, 0)$, con $f(E) = \frac{1}{4}$.
- Su L_-:

$$\begin{aligned} f_-(y) &= f(x,y)_{|L-} = f(-\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y^2 \\ f'_-(y) &= y \end{aligned}$$

  quindi si ha un punto di minimo locale in $G = (-\frac{1}{2}, 0)$, con $f(G) = \frac{1}{4}$.

Studiamo ora gli estremi vincolati sui due archi di circonferenza. Consideriamo la funzione:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)\,.$$

Dobbiamo trovare le soluzione del sistema, ottenuto imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1\,; \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ottiene che $y = 0$ (ma allora $x = \pm 1$, che non è ammissibile in quanto non appartiene ai due archi che stiamo considerando), oppure $x = -\lambda$, da cui si ottiene l'equazione $3x^2 + 2x - 1 = 0$. La soluzione $x = -1$ non è ammissibile, quindi l'unica soluzione ammissibile è $x = \frac{1}{3}$, con $y = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Abbiamo trovato quindi un punto critico vincolato

$$H = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$

in cui la funzione vale $f(H) = -\frac{5}{27}$.
In conclusione:

- Il massimo assoluto in K è $\frac{5}{8}$, che viene assunto nei punti A e B;
- il minimo assoluto in K è $-\frac{5}{27}$, che viene assunto nel punto H.

Esercizio 41. Denotiamo con $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$. Cominciamo con l'osservare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$; da ciò si deduce che il valore minimo di f è proprio 0: basta infatti calcolare la funzione nel punto $x_m = (0,0,0,1) \in \mathcal{D}$. Calcoliamone ora il valore massimo. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; consideriamo la funzione

$$F(x,\lambda) = \prod_{i=1}^4 x_i^i - \lambda\left(\sum_{i=1}^4 x_i - 1\right)$$

e imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} \partial_{x_j} F(x,\lambda) = j\dfrac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_j} - \lambda = 0 \qquad j = 1,2,3,4 \\ \sum_{i=1}^4 x_i = 1\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, otteniamo (possiamo supporre che $x_j \neq 0$, in quanto se $x_j = 0$ già sappiamo che funzione vale 0, che è il minimo):

$$\lambda = j\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_j} \qquad \forall\, j = 1,2,3,4.$$

Quindi ricaviamo:

$$\begin{aligned}
2\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_2} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&\quad x_2 = 2x_1\\
3\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_3} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&\quad x_3 = 3x_1\\
4\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_4} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&\quad x_4 = 4x_1\,,
\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione del vincolo:

$$x_1(1+2+3+4) = 1 \qquad \iff \qquad x_1 = \frac{1}{10}\,.$$

Quindi, il massimo viene assunto nel punto

$$x_M = \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$$

e vale $f(x_M) = \dfrac{27648}{10^{10}}$.

Esercizio 42. Cominciamo col calcolare l'estremo inferiore. Osserviamo che

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Consideriamo la successione $\{(\frac{1}{n}, 2n)\}_n$, che è ovviamente contenuta in $\mathcal{A}$; si ha che

$$\lim_{n\to 0} f\left(\frac{1}{n}, 2n\right) = 0$$

da cui si deduce che

$$\inf_{\mathcal{A}} f = 0\,.$$

Procediamo ora con la seguente osservazione: si può dimostrare che la funzione $g(t) = t + \frac{1}{2}\sin t$ è strettamente crescente e poiché $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ si può concludere che $\exists!\ c$ tc $g(t) > 1$ per $t > c$ e $g(t) < 1$ per t <c.
Quindi $\mathcal{A} = \{(x,y)$ t.c. $y > \frac{c}{x}\}$. Studiando il comportamento della funzione sul bordo $\partial\mathcal{A}$ (con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange), si trova che la funzione ha un massimo vincolato in $P_1 = (\sqrt{c}, \sqrt{c})$ e $P_2 = (-\sqrt{c}, -\sqrt{c})$, in cui la funzione vale $\frac{1}{2c}$.
Si verifica facilmente che $\sup_{\mathcal{A}} f = \dfrac{1}{2c}$. Infatti, supponiamo che esista un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_0, y_0) > \dfrac{1}{2c}$; osservando che

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 y_0 > c\,,$$

otteniamo:

$$\frac{1}{f(x_0,y_0)} = x_0^2 + y_0^2 < 2c < 2xy \iff x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 < 0$$
$$\iff (x_0 - y_0)^2 < 0$$

che è assurdo!
Nota: Osserviamo che c si può ricavare con approssimazione arbitrariamente piccola: utilizzando dei metodi numerici (ad esempio il metodo di bisezione) si ottiene che $0.68403 < c < 0.68404$.

1.3 Equazioni differenziali ordinarie e problemi di Cauchy

Esercizio 43. 1.1 Troviamo la soluzione di questo problema. Cominciamo considerando

$$\begin{cases} \dot{y} = 2y^2 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,. \end{cases}$$

Questo problema è facilmente integrabile e si ottiene:

$$\int_1^y \frac{dy}{y^2} = 2\int_{\frac{1}{2}}^t t\,dt \qquad \iff \qquad y(t) = \frac{1}{2(1-t)}\,.$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{4t^2}\cos\left(\frac{\pi}{4t}\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sin\frac{\pi}{4t}\right) \end{aligned}$$

ed integrando

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4t}\right) + C\,;$$

per determinare il valore della costante C, sostituiamo il dato iniziale ed otteniamo

$$C = 0\,.$$

In conclusione la soluzione trovata è data da

$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4t}\right) \\[2ex] y(t) = \dfrac{1}{2(1-t)}\,. \end{cases}$$

Questa soluzione è definita per $t \in (0,1)$, che è chiaramente l'intervallo di esistenza massimale.

1.2 Per mostrare che

$$\lim_{t \downarrow 0} \operatorname{dist}\left((x(t), y(t)),\ \left\{ y = \frac{1}{2} \right\} \right) = 0$$

è sufficiente osservare che

$$\operatorname{dist}\left((x(t), y(t)),\ \left\{ y = \frac{1}{2} \right\} \right) = \left| y(t) - \frac{1}{2} \right| .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \operatorname{dist}\left((x(t), y(t)),\ \left\{ y = \frac{1}{2} \right\} \right) = \\ & = \lim_{t \downarrow 0} \left| y(t) - \frac{1}{2} \right| = \\ & = \lim_{t \downarrow 0} \left| \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2} \right| = 0 . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 1} |(x(t), y(t))| \quad & \geq \quad \lim_{t \uparrow 1} |y(t)| = \\ & = \quad \lim_{t \uparrow 1} \left| \frac{1}{2(1-t)} \right| = +\infty \end{aligned}$$

e questo mostra il secondo limite.
Mostriamo ora che ogni punto $P \in [-1, 1] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ è un punto limite della nostra soluzione per $t \downarrow 0$. Infatti, sia $P = \left(x_0, \frac{1}{2} \right)$; allora esiste un $\gamma_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ tale che

$$x_0 = \sin \gamma_0 = \sin(\gamma_0 + 2\pi n) ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo prendere quindi una successione crescente di punti

$$\gamma_n \equiv \gamma_0 + 2\pi n \in [2\pi n,\, 2\pi(n+1)], \qquad \gamma_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e definire una successione di tempi

$$t_n \equiv \frac{\pi}{4\gamma_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Mostriamo che si tratta proprio della successione cercata. Innazitutto, osserviamo che $t_n \in (0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; infatti:

$$\begin{aligned} 0 \quad & \leq \quad t_n = \frac{\pi}{4\gamma_n} = \frac{\pi}{4(\gamma_0 + 2\pi n)} \leq \\ & \leq \quad \frac{\pi}{4\gamma_0} \leq \frac{\pi}{4} \frac{2}{\pi} = \\ & = \quad \frac{1}{2} < 1 . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}(x(t_n), y(t_n)) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4t_n}\right), \frac{1}{2(1-t_n)}\right) = \\ &= \left(\sin\gamma_n, \frac{1}{2(1-t_n)}\right) = \\ &= \left(x_0, \frac{1}{2(1-t_n)}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(x_0, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

1.3 Ci possiamo limitare a considerare i compatti K contenuti in

$$\mathcal{A} \equiv [-1,1] \times \left(\frac{1}{2}, \infty\right),$$

in quanto il grafico della nostra soluzione è contenuto in $\mathcal{A}$.
Sia K un tale compatto, cioè un insieme chiuso e limitato (in quanto stiamo lavorando in $\mathbb{R}^2$); esistono quindi finiti

$$m = \min_{(x,y)\in K} y \qquad M = \max_{(x,y)\in K} y$$

ed in particolare $m > \frac{1}{2}$. Per quanto detto prima

$$\lim_{t\downarrow 0} y(t) = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{t\uparrow 1} y(t) = +\infty,$$

e quindi (come segue dalla definizione di limite) esisteranno sicuramente dei tempi t_0 e t_1 che soddisfano le ipotesi richieste, per ogni $0 < \delta < 1$.

Esercizio 44. Risolviamo anche in questo caso le due equazioni separatamente.

- Cominciamo con la prima equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{x^2}{\beta^2}\right) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\int_0^x \frac{\frac{1}{\beta}}{1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^t t\,dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{\pi}{4}t$$

e quindi la soluzione sarà data da:

$$x(t,\beta) = \beta\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

- Per quanto riguarda la seconda equazione, si integra facilmente ed otteniamo
$$y(t,\beta) = e^{\beta t}\,.$$

In conclusione la soluzione trovata è data da
$$\begin{cases} x(t,\beta) = \beta\,\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \\ y(t,\beta) = e^{\beta t}\,. \end{cases}$$
Quindi l'intervallo di esistenza massimale è
$$I_\beta = (-2,2)\,,$$
che non dipende da β.
Mostriamo ora la seconda parte. Sia K un compatto contenuto in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e siano β, $\beta' \in K$; sia inoltre C un compatto in $\cap_{\beta\in K} I_\beta = (-2,2)$ e sia $t_0 \in C$. Definiamo le seguenti costanti (sono tutte finite in quanto si tratta di massimi di funzioni continue su compatti):
$$\begin{aligned} T &\equiv \sup_{t\in C}\left|\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right| < \infty \\ M &\equiv \sup_{(\beta,t)\in K\times C} e^{\beta t} < \infty \\ B &\equiv \sup_{t\in C}|t| < \infty\,. \end{aligned}$$
Abbiamo le seguente stime sulle due componenti:
$$\begin{aligned} |x(t_0,\beta) - x(t_0,\beta')| &\le \left|\beta\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}t_0\right) - \beta'\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}t_0\right)\right| \le \\ &\le T\,|\beta-\beta'| \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} |y(t_0,\beta) - y(t_0,\beta')| &\le \left|e^{\beta t_0} - e^{\beta' t_0}\right| \le \\ &\le M\,|\beta t_0 - \beta' t_0| \le \\ &\le M\,B\,|\beta-\beta'|\,. \end{aligned}$$
Otteniamo quindi la seguente costante di Lipschitz:
$$L = \sqrt{T^2 + M^2B^2}\,.$$

1.4 Successioni e serie di funzioni. Elementi di analisi complessa

Esercizio 45. (1) Per definizione di uniforme continuità, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0$ t.c. $\forall m,n > N_0$

$\sup_{x\in(a,b)} |u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon$. Per concludere basta osservare che:
$\sup_{x\in(a,b)} |u_m(x) - u_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |u_m(x) - u_n(x)|$.
Infatti se consideriamo la successione $\{x_k\}_{k\geq 2} = \{a + \frac{b-a}{k}\}_{k\geq 2} \subseteq (a,b)$, questa è tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = a$; dalla continuità delle funzioni u_n segue che $\lim_{k\to\infty} |u_n(x_k) - u_m(x_k)| = |u_n(a) - u_m(a)|$, e quindi si ha che $|u_n(a) - u_m(a)| \leq \sup_{x\in(a,b)} |u_m(x) - u_n(x)|$. Si applica lo stesso ragionamento per il punto b e segue l'asserto.
(2) Se per assurdo convergesse uniformemente in (a,b), applicando il punto precedente seguirebbe la convergenza uniforme in $[a,b]$; ma ciò implicherebbe la convergenza di $\{u_n(a)\}$.

Esercizio 46. Osserviamo che le funzioni si possono esplicitare nella forma:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2nx + 2 & \text{se } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Dimostriamo le varie affermazioni:

1. Se $x \leq 0$ allora $f_n(x) \equiv 0\ \forall n$; mentre se $x > 0$, allora esiste $n_0 = [\frac{1}{x}] + 1$ t.c. $\forall\, n \geq n_0$ si ha che $f_n(x) = 0$;
2. Infatti $\forall\, n \geq 1$ si ha che $\sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$;
3. $\lim \int_0^1 f_n = \lim \frac{1}{2n} = 0 = \int_0^1 f$.

Esercizio 47. Consideriamo ad esempio le funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -4n^2x + 4n & \text{se } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{se } x \notin [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Per la prima parte del punto facoltativo, considerare ad esempio le funzioni:

$$g_n(x) = \begin{cases} [x(\frac{1}{n} - x)]^{k+1} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e definire la successione } f_n = \frac{g_n}{\int_0^1 g_n}$$

Esercizio 48.
1. Convergenza puntuale in $(-e^\alpha, e^\alpha)$
Convergenza totale ed uniforme in ogni compatto $K \subset (-e^\alpha, e^\alpha)$;
2. Se $\alpha \leq 0$:
   - Convergenza puntuale in $(1, +\infty)$
   - Convergenza totale e uniforme in $[a, +\infty)$ con $a > 1$;

Se $\alpha > 0$:

- Convergenza puntuale in $[0,1)$
- Convergenza totale e uniforme in $[0,a]$ con $0 < a < 1$;

3. Definiamo l'insieme $\mathcal{A} \equiv \{\frac{1}{n^2} \mid n \geq 1\}$:
Convergenza puntuale in $[-1,1] \setminus \mathcal{A}$
Convergenza totale ed uniforme in ogni compatto contenuto in $([-1,a] \cup [0,1]) \cap \mathcal{A}^c$ con $-1 < a < 0$;

4. Convergenza puntuale in $(-e^{-1}, e^{-1})$ [12]
Convergenza totale ed uniforme in ogni compatto $K \subset (-e^{-1}, e^{-1})$;

5. Convergenza puntuale in $(0, +\infty)$
Convergenza totale ed uniforme in $[a, +\infty)$ con $a > 0$;

Esercizio 49. Si ha che $\forall x \in (-1,1)$, $\sum_{n\geq 1} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$.
Sostituendo $x = \frac{1}{2}$ si ottiene che $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{2^n} = 26$.

Esercizio 50. 1. Sappiamo che la serie geometrica di ragione x, con $|x| < 1$, ha somma $\frac{1}{1-x}$, cioè si ha che $\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. Derivando j volte $\frac{1}{1-x}$ otteniamo: $\frac{d^j}{dx^j}(\frac{1}{1-x}) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$.
Per il teorema 2.5 ([C]) si ha la seguente relazione:
Se $|x| < 1$, allora $\frac{j!}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+j)!}{k!} x^k$ ovvero $\frac{1}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix} x^k$.
Quindi $\forall\, |x| < 1$: $\frac{x^m}{(1+x)^n} = x^m \frac{1}{(1-x)^n} = x^m \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} x^k = \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} x^{m+k} = \sum_{k\geq m} \begin{pmatrix} n-1-m+k \\ j \end{pmatrix} x^k$.

2. Osserviamo che la serie $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ ha raggio di convergenza infinito (si dimostra ad esempio con il criterio del rapporto); dobbiamo quindi dimostrare che $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Consideriamo il Polinomio di Taylor di ordine N di e^x ed esprimiamo il resto con la formula di Lagrange; si ha:

$$|e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} e^{\xi} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \exists \xi$$

da cui segue la tesi.

[12] Può essere utile ricordarsi la formula di stirling $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$, e applicando il criterio del confronto asintotico, ricondursi allo studio della serie $\sum \frac{(xe)^n}{\sqrt{2\pi n + x}}$.
(Cfr E. Giusti Esercizi e compl. di Anal. mat. I, Cap 7 par.9 (formula Stirling) e Cap.4 par.2 (Criterio asintotico)

3. Osserviamo che $\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$. Noi sappiamo che per $|t| < 1$ si ha: $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$ (segue immediatamente osservando che si tratta di una serie geometrica di ragione $-t$).
Applicando il Teorema 2.5 ([C]), per $|x| < 1$ si ha che:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

4. Dal punto precedente segue immediatamente che: $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ (Basta infatti sostituire ad x, $-x$)
Inoltre dalle proprietà della funzione logaritmo, segue che: $\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$; Sostituendo le relazioni precedentemente trovate si ha la tesi:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k+1}+1]\frac{x^k}{k} = 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}.$$

5. Cominciamo col calcolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ (con $\alpha \in \mathbb{R}\setminus Z$); applicando il criterio del rapporto si ha che:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\binom{\alpha}{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1$$

da cui segue che $\limsup\left|\binom{\alpha}{k}\right|^{\frac{1}{k}} = 1$; quindi tale serie ha raggio di convergenza $R = 1$.
Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor nell'origine di tale funzione:
$D^k(1+x)^{\alpha}_{|x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}_{|x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$
quindi: $P_N(x,0) = \sum_{k=0}^{N}\binom{\alpha}{k}x^k$.
Verifichiamo ora che $\forall\,|x| < 1 \qquad (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$.
Per fare questo, mostriamo (usando l'espressione integrale del Resto di Taylor) che : $|(1+x)^{\alpha} - P_{N-1}(x,0)| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Sia $x \in (-1,1)$ e sia $|x| < \theta < 1$; allora $\exists\,\epsilon > 0$ t.c. $\theta(1+\epsilon) < 1$ (questo per il semplice fatto che $\theta < 1$); Inoltre, poichè $\limsup\left|\binom{\alpha}{k}\right|^{\frac{1}{k}} = 1$, esisterà un N_0 t.c. $\forall\, N \geq N_0 \qquad \left|\binom{\alpha}{N}\right|^{\frac{1}{N}} \leq 1+\epsilon$ (segue immediatamente dalla definizione di lim sup).

Tenendo conto delle assunzioni fatte e dell'espressione integrale del resto di Taylor, si ha ($N \geq N_0$):
$|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) x^k| = |\int_0^x \frac{(x-s)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(s) ds| = |\int_0^1 \frac{(x-xt)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(tx) x dt| =$
$|x|^N |\int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-N+1)(1+tx)^{\alpha-N} dt| =$
$|x|^N |\int_0^1 N \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ N \end{array} \right) (1+tx)^{\alpha-N} dt| =$
$N|x|^N \left| \left(\begin{array}{c} \alpha \\ N \end{array} \right) \right| |\int_0^1 \left(\frac{(1-t)}{1+tx}\right)^{N-1} (1+tx)^{\alpha-1} dt| \leq$ [13]
$N((1+\epsilon)\theta)^N (1-\theta)^{-|\alpha-1|} \int_0^1 \left(\frac{(1-t)}{1+tx}\right)^{N-1} dt \leq$ [14]
$N((1+\epsilon)\theta)^N (1-\theta)^{-|\alpha-1|} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Osserviamo che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ha raggio di convergenza infinito (si dimostra ad esempio con il criterio del rapporto). Per dimostrare che $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, usiamo l'espressione di Lagrange del resto di Taylor (come in (2)):
$$|\sin x - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} |f^{2N+3}(\xi)| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

7. Si dimostra esattamente come in (6);

8. Osserviamo che $\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Dal punto (5) segue che:
$\forall\, |t| < 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{-1}{2} \\ k \end{array} \right) (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k}$ [15].
Dal teorema 2.5 [C]:
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
.

9. Basta osservare che $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ e applicare il risultato precedente;

10. Basta osservare che $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ e procedere esattamente come in (8);

11. Notiamo che $\sinh x = -i \sin(ix)$ e utilizzando il punto (6) si ha:
$$\sinh x = -i \sin(ix) = -i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+2} \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
.

[13] Usiamo il fatto che $\sup_{t\in[0,1]}(1+tx)^{\alpha-1} = sup_{\xi\in[-\theta,\theta]}(1+\xi)^{\alpha-1} \leq (1-\theta)^{-|\alpha-1|}$

[14] Basta osservare che per le hp fatte su t e x si ha: $0 \leq \frac{1-t}{1+tx} \leq 1$

[15] Il doppio fattoriale è definito così: $(-1)!! \equiv 1\,,\ 0!! \equiv 0\,,\ 1!! \equiv 1$ e per $n \geq 2$ $n!! \equiv n(n-2)!!$

12. Basta osservare che $\cosh x = \cos(ix)$ e procedere come sopra;

13. Basta osservare che $\operatorname{arcsinh} x = -i \arcsin(ix)$ e procedere come sopra;

14. Basta osservare che $\operatorname{arctanh} x = -i \arctan(ix)$ e procedere come sopra; (oppure si può usare l'identità: $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ ed utilizzare il punto (4)).

Esercizio 51. 1. Osserviamo che

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right) = \\ &= n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Quindi il limite puntuale è $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall\, x > 0\,.$

2. Per quanto riguarda l'uniforme convegenza, ricordiamo che:

f_n converge uniformemente ad f in $E \subseteq (0,+\infty) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_E |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$

Osserviamo che:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2}$$

quindi la successione di funzioni non può convergere uniformemente su $(0,+\infty)$, in quanto $\sup_{(0,+\infty)} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = +\infty \overset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$
Dimostriamo invece che vi è uniformità nella convergenza in ogni sottoinsieme del tipo $[a,+\infty)$ con $a > 0$; infatti:

$$\sup_{[a,+\infty)} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} =^{16} \frac{1}{2n\sqrt{a}\left(\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}\right)^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Esercizio 52. $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$:

[16] Notare che si tratta di una funzione monotona decrescente

- Convergenza puntuale in $[0, +\infty)$;
- Convergenza uniforme in $[0, +\infty)$;
- Convergenza totale in $[0, +\infty)$.

$\sum_{n\geq 1} u'_n(x)$:

- Convergenza puntuale in $(0, +\infty)$;
- Convergenza uniforme in $[a, +\infty)$ con $a > 0$;
- Convergenza totale in $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Applicando il Teorema di derivazione per serie (cfr. [C], Teorema 1.6), si vede facilmente che $u \in \mathcal{C}^1((0, +\infty))$ e che su tale insieme $u'(x) = v(x)$.

Esercizio 53. (Cfr.: [C], Paragrafo 2.4, e W.Rudin Principle of Mathematical Analysis, McGraw Hill)

- Definiamo la **funzione esponenziale** nel campo complesso, nel seguente modo:
$$\exp z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \forall\, z \in C$$
- Definiamo le **funzioni trigonometriche** nel campo complesso, nel seguente modo:
$$\cos z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{e} \qquad \sin z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, z \in C$$
- Diamo una definizione analitica di π: sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli zeri positivi del coseno ovvero $\mathcal{A} \equiv \{x > 0 : \quad \cos x = 0\}$. Tale insieme è non vuoto. Infatti il coseno è una funzione continua tale che $\cos 0 = 1$ mentre $\cos 2 < -\frac{1}{3}$.
Definiamo $\pi = 2\alpha_1$, dove $\alpha_1 \equiv \inf \mathcal{A}$.

Dimostriamo ora che $\exp(i\pi) = -1$.
Prima di procedere nella dimostrazione, dimostriamo dei fatti che torneranno utili in seguito.
Lemma 1: (Formula di Eulero) $\forall\, z \in C \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Dim.: Per come abbiamo definito l'esponenziale complesso, si ha che:

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(i^{4k} \frac{z^{4k}}{(4k)!} + i^{4k+1} \frac{z^{4k+1}}{(4k+1)!} + i^{4k+2} \frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!} + \right.$$

$$\left. i^{4k+3} \frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4k}}{(4k)!} + i \frac{z^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!} - i \frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^{4k}}{(4k)!}-\frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!}\right)+i\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^{4k+1}}{(4k+1)!}-\frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\equiv \cos z+i\sin z.$$

Lemma 2: $\forall\, z\in C \qquad \cos z=\cos(-z) \qquad \text{e} \qquad \sin z=-\sin(-z)$

Dim.: Per come abbiamo definito cos e sin, si ha che la prima è una funzione pari (ci sono solo coefficienti pari nella serie), mentre la seconda è una funzione dispari (ci sono solo coefficienti dispari):

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-z)^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-z)^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Lemma 3: $\forall\, z,w\in C \qquad \exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$

Dim.: Vedi [C], formula (2.60) con relativa dimostrazione.

Lemma 4: $\forall\, z\in C \qquad \cos^2 z+\sin^2 z=1$

Dim.: Per come abbiamo definito cos e sin, si ha che:

$$\cos^2 z+\sin^2 z=(\cos z+i\sin z)(\cos z-i\sin z)=(\cos z+i\sin z)(\cos(-z)+i\sin(-z))=$$

$$=e^{iz}e^{-iz}=e^0=1\,.$$

Lemma 5: Valgono le seguenti formule di duplicazione:

$$\sin(2z)=2\sin z\cos z \qquad \cos(2z)=\cos^2 z-\sin^2 z \qquad \forall\, z\in C$$

Dim.: Dimostriamo quelle relative alla funzione sin (per il cos si procederà in maniera analoga).

Per la definizione data: $\sin 2z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Calcoliamo invece $2\sin z\cos z$:

$$2\sin z\cos z=2\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\right)=$$

Osserviamo che la serie prodotto avrà solo i termini di grado dispari (in quanto ogni termine è ottenuto moltiplicando un termine di grado pari con uno di grado dispari).

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}z^{2k+1} \qquad (*)$$

con:

$$\alpha_{2k+1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{(-1)^{k-n}}{(2(k-n)+1)!}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{(2k+1)!}{(2n)!(2k+1-2n)!}=$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^{k} \binom{2k+1}{2n} =$$

Osserviamo che $\binom{2k+1}{2n} = \binom{2k+1}{2k+1-2n}$, quindi:

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{n} =^{17} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{2} 2^{2k+1}$$

Quindi sostituendo in (*) si ha la tesi.

Utilizzando i lemmi precedentemente esposti segue immediatamente il nostro asserto; infatti:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = \cos 2\frac{\pi}{2} + i\sin 2\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} + 2i\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} =$$

Per come abbiamo definito π segue immediatamente che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, per cui:

$$= -\sin^2\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\pi}{2} - 1 = -1$$

che è la tesi.

Esercizio 54. Osserviamo che ϕ_ϵ è una funzione integrabile su $\mathbb{R}$ (si denota $f \in L^1(\mathbb{R})$), in quanto è $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto (si denota $f \in \mathcal{C}_0^\infty$) e quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx = \int_0^\epsilon \phi_\epsilon dx \le \|\phi_\epsilon\|_\infty \epsilon < \infty^{18}.$$

Costruiamo ora la funzione γ; definiamo:

$$\gamma(x) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{x} \phi_\epsilon dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx}.$$

Facciamo le seguenti osservazioni:

1. Tale funzione è ben definita per quanto detto sopra sull'integrabilità di ϕ_ϵ ed inoltre è $\mathcal{C}^\infty$ per le proprietà di regolarità date su ϕ_ϵ (infatti $\forall k \ge 1 \quad \gamma^{(k)}(x) = \frac{\phi_\epsilon^{(k-1)}(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_\epsilon dx}$);

[17] Osserviamo che $\sum_{n=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{n} = (1+1)^{2k+1} = 2^{2k+1}$ (Formula del Binomio di Newton)

[18] la limitatezza segue dal teorema di Weierstrass: ϕ_ϵ è continua su $[0, \epsilon]$ che è compatto e nulla al di fuori di tale compatto.

2. γ è monotona non decrescente : infatti $\phi_\epsilon \geq 0$ e per la monotonia dell'integrale di funzioni positive, segue l'asserto;

3. se $x \leq 0 \qquad \gamma(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \phi_\epsilon dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx} = \frac{0}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx} = 0$ (infatti in questo caso $(-\infty, x) \cap \mathrm{supp}\phi_\epsilon = \emptyset$);

4. se $x \geq \epsilon \qquad \gamma(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \phi_\epsilon dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx} = 1$ (infatti in questo caso si ha che $(-\infty, x] \supseteq \mathrm{supp}\phi_\epsilon$ e quindi $\int_{-\infty}^{x} \phi_\epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon dx$);

Quindi la funzione così costruita soddisfa tutte le condizioni richieste. Calcoliamo le due serie di Taylor richieste:

- In $x = 0$, ho che $\gamma(0) = 0$ e $\forall\, k \geq 1 \qquad \gamma^{(k)}(0) = 0$ (in quanto ϕ_ϵ è $\mathcal{C}^\infty$ e ha supporto in $[0, \epsilon]$: quindi si deve raccordare in $x = 0$ in maniera regolare, e perciò deve avere in tale punto derivata di ogni ordine nulla).
  Quindi la serie di Taylor richiesta in tale punto è la serie identicamente nulla.

- In $x = \epsilon$, ho che $\gamma(\epsilon) = 1$ e $\forall\, k \geq 1 \qquad \gamma^{(k)}(0) = 0$ (in quanto ϕ_ϵ è $\mathcal{C}^\infty$ e ha supporto in $[0, \epsilon]$: quindi si deve raccordare in $x = \epsilon$ in maniera regolare, e perciò deve avere in tale punto derivata di ogni ordine nulla).
  Quindi la serie di Taylor richiesta in tale punto è la serie costantemente uguale ad 1.

Osserviamo che la funzione così costruita, nonostante l'elevata regolarità non è analitica in nessuno dei punti sopra considerati, in quanto non riesco a trovare due intorni di tali punti in cui la funzione sia $\equiv 0$ e $\equiv 1$, rispettivamente.

1.5 Teorema delle funzioni implicite e della funzione inversa

Esercizio 55. $(\Rightarrow)$: $M(t)$ è continua, quindi $\forall\, i, j \; M_{ij}(t)$ è una funzione continua; da ciò segue che $\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta_{ij}$ t.c. $|M_{ij}(t) - M_{ij}(t_0)| < \epsilon\,,\ \forall\, |t - t_0| < \delta_{ij}$. Prendendo $\delta = \min_{i,j} \delta_{ij}$ si ha la tesi.
$(\Leftarrow)$: Basta osservare che $\forall\, i, j \; |M_{ij}(t) - M_{ij}(t_0)| < \|M(t) - M(t_0)\|$.

Esercizio 56. Applichiamo il Teorema della funzione inversa: $f \in \mathcal{C}^\infty(\{y_0\}, \mathbb{R}^2)$ e si ha che

$$f'(y_0) = \begin{pmatrix} 1 + 2y_1 \cos y_2 & -y_1^2 \sin y_2 \\ 2y_1 & 1 \end{pmatrix}_{|y_0 = (0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\det f'(y_0) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists!$ funzione inversa locale di f di classe $\mathcal{C}^\infty(\{f(y_0)\}, \mathbb{R}^2)$.

Stimiamo ora r in modo che valga la condizione del teorema della funzione inversa: [19]

$$\|I - Tf'(y)\|_{\infty,\infty} \;=\; \max\left\{|2y_1 \cos y_2| + |y_1^2 \sin y_2|\,,\, |2y_1|\right\} \leq\; 3\rho$$

quindi è sufficiente scegliere $\rho = \frac{1}{6}$, da cui segue che $r = \frac{\rho}{2\|T\|} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 57.

1. Cominciamo con l'osservare che

$$\begin{aligned} f(x_0, g(x_0)) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad g(x_0)^2 - 6g(x_0) - 16 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad g(x_0) = -2 \quad \text{oppure} \quad g(x_0) = 8 \end{aligned}$$

   quindi dobbiamo applicare il teorema delle funzioni implicite nei punti

$$P_+ = (1, -2, 8) \qquad \text{e} \qquad P_- = (1, -2, -2).$$

   In tali punti si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(P_+) \;&=\; (2y-6)_{|_{y=8}} = 10 \;\neq\; 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_-) \;&=\; (2y-6)_{|_{y=-2}} = -10 \neq 0 \end{aligned}$$

   e di conseguenza (applicando il TFI) esistono due funzioni $g_\pm$, che sono C^∞ in un intorno di x_0, tali che $f(x, g_\pm(x)) = 0$ in tale intorno e

$$g_+(x_0) = 8 \qquad \text{e} \qquad g_-(x_0) = -2\,.$$

2. L'unica soluzione che è positiva in x_0 è $g+$. Quindi dobbiamo mostrare che in tale punto la funzione ha un massimo relativo stretto, cioè il suo gradiente è nullo in x_0 e la sua matrice hessiana in tale punto è definita negativa.
   Cominciamo col mostrare che $\nabla g(x_0) = 0$. Usando il fatto che in un intorno di x_0

$$f(x, g_+(x)) = |x|^2 + g(x)^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6g(x) - 11 \equiv 0\,,$$

   e derivando questa equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 \;&\equiv\; \nabla(f(x_0, g_+(x_0))) = \\ &=\; 2(x_0)^T + 2g_+(x_0)\,\nabla g_+(x_0) + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\nabla g_+(x_0) = \\ &=\; 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 16\,\nabla g_+(x_0) + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\nabla g_+(x_0) = \\ &=\; 10\,\nabla g_+(x_0) \end{aligned}$$

[19] Per la notazione usata, cfr. [C] Teorema 7.5

e quindi $\nabla g_+(x_0) = 0$, cioè x_0 è un punto critico per la nostra funzione. Valutiamo ora la matrice hessiana $H_{g_+}(x_0)$. Usando la relazione scritta sopra e derivando, otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, g(x)) = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2g_+(x_0) - 6) H_{g_+}(x_0) + \\
&\quad + 2 \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_+(x_0) \partial_{x_1} g_+(x_0) & \partial_{x_1} g_+(x_0) \partial_{x_2} g_+(x_0) \\ \partial_{x_2} g_+(x_0) \partial_{x_1} g_+(x_0) & \partial_{x_2} g_+(x_0) \partial_{x_2} g_+(x_0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 10\, H_{g_+}(x_0)\,,
\end{aligned}$$

e di conseguenza la matrice hessiana è definita negativa:

$$H_{g_+}(x_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

e quindi si tratta di un punto di massimo relativo (stretto).

Esercizio 58. Consideriamo la **prima formulazione** dell'esercizio (poi faremo delle osservazioni sull'equivalenza della seconda formulazione).
Applichiamo il teorema della funzione inversa alla funzione f. Cominciamo con l'osservare che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e la sua matrice Jacobiana è data da:[20]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \mathbb{I}_n + 2(\cos|x|^2) A \qquad \text{con A matrice di elementi } A_{ij} \equiv (v_i x_j)$$

Ovviamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = \mathbb{I}_n$, che è chiaramente invertibile e

$$\det \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \det \mathbb{I}_n = 1\,.$$

Quindi esiste un'unica funzione g, inversa di f, con $g \in C^\infty(B_r(0))$ per un opportuno $r > 0$. Cerchiamo di dare un stima del raggio r di tale intorno.
In particolare, dal teorema della funzione inversa[21] segue che se ρ è t.c.

$$\sup_{|x| \le \rho} \left\| \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \le \frac{1}{2}$$

[20]Notare infatti che $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j} + 2 v_i x_j \cos|x|^2$, dove $\delta_{i,j}$ è il simbolo di Kroenecker, cioè:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

[21]Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pag. 156

allora g è definita su $B_r(0)$ con

$$r \equiv \frac{\rho}{2\,\|\mathbb{I}_n\|} = \frac{\rho}{2}\,.$$

Diamo quindi una stima per ρ usando i seguenti fatti:[22]

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n\frac{\partial f}{\partial x}\right\| &= \left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n - 2(\cos|x|^2)A\right\| \leq \\
&\leq 2\|A\| \\
\|A\| &= \max\{|v_1|\|x\|_1, \ldots, |v_n|\|x\|_1\} \leq \\
&\leq \|v\|_\infty \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_\infty\,|x|\,.
\end{aligned}$$

Usando tali relazioni segue immediatamente che:

$$\begin{aligned}
\sup_{|x|\leq\rho}\left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n\frac{\partial f}{\partial x}\right\| &\leq \sup_{|x|\leq\rho} 2\sqrt{n}\,(\|v\|_\infty\,|x|) \leq \\
&\leq 2\sqrt{n}\,\|v\|_\infty\,\rho
\end{aligned}$$

e di conseguenza sarà sufficiente prendere

$$\rho \leq \frac{1}{4\sqrt{n}\|v\|_\infty}$$

e quindi

$$r \leq \frac{1}{8\sqrt{n}\|v\|_\infty}\,.$$

Osserviamo che $r \to +\infty$ quando $\|v\| \to 0$; questo risultato era in un certo senso " attendibile" in quanto quando $\|v\| \to 0$, la f tende alla funzione identità, che è invertibile dappertutto!
Discutiamo ora brevemente la **seconda formulazione** dell'esercizio. In tal caso l'esercizio può essere risolto applicando direttamente il teorema della funzione implicita (anzichè il teorema della funzione inversa). Indichiamo con

$$F(x, y) = f(x) - y$$

[22] La norma di una matrice è così definita (consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la norma del sup):

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty=1}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \\
&= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty=1}} \|Ax\|_\infty.
\end{aligned}$$

Si dimostra (Esercizio!) che tale sup è proprio uguale alla seguente espressione:

$$\|A\| = \max_{k=1,\ldots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

cioè è il massimo delle somme dei moduli delle componenti di ciascuna riga.

e mostriamo che è possibile applicare il TFI in un intorno del punto $(x, y) = (0, 0)$; infatti (utilizziamo la stessa notazione introdotta nella discussione precedente):

$$\begin{aligned} F(0,0) &= f(0) - 0 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) &= \mathbb{I}_n + \left[2(\cos|x|^2)A\right]_{(x,y)=(0,0)} = \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

quindi la matrice jacobiana è invertibile nel punto $(0, 0)$. Applicando il TFI possiamo concludere l'esistenza di una funzione g definita in un intorno di $y = 0$, tale che per ogni punto in tale intorno si abbia:

$$F(g(y), y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(g(y)) = y$$

ma quindi la g altri non è, se non l'inversa di f in un intorno di $x = 0$.
Troviamo ora un $r > 0$ in modo che la g sia definita su $B_r(0)$. Sempre dal teorema della funzione implicita[23] segue che è sufficiente trovare r, $\rho > 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\sup_{B_r(0)} |F(0,y)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} \qquad \text{con} \qquad T \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\right)^{-1} = \mathbb{I}_n \\ &\sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right\| \leq \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Cominciamo dalla prima stima:

$$\sup_{B_r(0)} |F(0,y)| \;=\; \sup_{B_r(0)} |y| = r\,,$$

quindi bisognerà richiedere che $r \leq \frac{\rho}{2}$.
Per quanto riguarda la seconda stima (useremo le osservazioni fatte in precedenza a proposito di $\|A\|$):

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right\| &= \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left\|\mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n - 2(\cos|x|^2)A\right\| = \\ &= \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} (2\|A\|) \leq \\ &\leq \sup_{B_\rho(0)\times B_r(0)} \left(2\sqrt{n}\|v\|_\infty |x|\right) \leq \\ &\leq 2\sqrt{n}\|v\|_\infty \rho \end{aligned}$$

quindi sarà sufficiente richiedere $\rho \leq \dfrac{1}{4\sqrt{n}\|v\|_\infty}$.
Concludendo la g è definita per

$$r \leq \frac{1}{8\sqrt{n}\|v\|_\infty}\,.$$

[23] Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pagg. 151 e ss.

Esercizio 59.

1. Applichiamo il teorema della funzione implicita alla funzione

$$g(x,y) = e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2\sin y - 1\,.$$

Osserviamo che

$$g(0,0) = 0$$

e che

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad = \quad 2y\left(e^{x^2+y^2} - 2\right) + 2\cos y$$

da cui

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 2 \neq 0\,.$$

Quindi applicando il TFI segue l'esistenza di una funzione $y = f(x)$, definita in un intorno di $x = 0$ (i.e $B_r(0)$ per un opportuno $r > 0$), tale che

$$g(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in B_r(0) \qquad \text{e} \qquad f(0) = 0\,.$$

2. Cerchiamo di dare una stima sul raggio dell'intorno di definizione della f, i.e. r. Dal teorema della funzione implicita[24] segue che è sufficiente trovare r, $\rho > 0$ tali che

$$\sup_{B_r(0)} |g(x,0)| \leq \frac{\rho}{2|T|} \qquad \text{con} \qquad T \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}\,.$$

Cominciamo con lo studiare la prima stima, assumendo che $r < 1$:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_r(0)} |g(x,0)| &= \sup_{B_r(0)} |e^{x^2} - x^2 - 1| \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(|e^{x^2} - 1| + |x|^2\right) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(e^{r^2}|x|^2 + |x|^2\right) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)} \left(e^{r^2} + 1\right)|x|^2 \leq \\
&\leq 4\,r^2 \overset{\text{th.}}{\leq} \rho\,.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[24]Cfr. Luigi Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, pagg. 151 e ss.

Per quando riguarda la seconda stima, assumendo che $\rho < 1$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| &\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - ye^{x^2+y^2} + 2y - \cos y\right| \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \Big(|1-\cos y| + |y|\,|e^{x^2+y^2} - 2|\Big) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} (|y| + 6|y|) \leq \\
&\leq \sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} 7|y| \leq \\
&\leq 7\rho \overset{\text{th.}}{\leq} \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}
$$

cioè è sufficiente chiedere $\rho \leq \dfrac{1}{14}$. Sostituendo in (1.4) otteniamo

$$
r^2 \leq \frac{1}{4\cdot 14} = \frac{1}{56} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \leq \frac{1}{\sqrt{56}}\,.
$$

3. Il limite richiesto è una forma indeterminata, ma può essere risolto applicando il teorema di De L'Hopital. Osserviamo innanzitutto che

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,f(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,f(x))} = \\
&= -\frac{2x\left(e^{x^2+f^2(x)} - 1\right)}{2f(x)\left(e^{x^2+f^2(x)} - 2\right) + 2\cos f(x)}
\end{aligned}
$$

e quindi:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+f^2(x)} - 1}{2f(x)\left(e^{x^2+f^2(x)} - 2\right) + 2\cos f(x)} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Capitolo 2

Integrazione in $\mathbb{R}^n$

2.1 Misura di Peano-Jordan e integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

Esercizio 60. 1. • Cominciamo col dimostrare che se $q = \frac{m}{n}$ (con $0 < m \leq n$ e MCD(m,n)=1), allora f è discontinua in q.
Consideriamo, infatti, la successione $\{\alpha_n\} \subset [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $\alpha_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$ (questo è possibile per la densità degli irrazionali in $[0,1]$). Si ha quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = 0 \neq \frac{1}{n} = f(q).$$

• Chiaramente f è continua in $q = 0$.
Infatti, se $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ con $\beta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : n > N$, $0 < \beta_n < \varepsilon$; è opportuno distinguere due casi: se β_n è irrazionale, allora $f(\beta_n) = 0$; se invece $\beta_n = \frac{m_n}{k_n}$, allora per $n > N$ si ha $\varepsilon > \beta_n = \frac{m_n}{k_n} \geq \frac{1}{k_n} = f(\beta_n)$.
Concludendo: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : n > N$, $0 \leq f(\beta_n) < \varepsilon$, che dimostra l'asserto.

• Infine dimostriamo la continuità nei punti di $(0,1] \setminus \mathbb{Q}$.
Sia $\alpha \in (0,1] \setminus \mathbb{Q}$ e sia $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ con $\beta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Osserviamo che $\forall \varepsilon > 0$, esistono soltanto un numero finito di razionali q_j, tc $f(q_j) \geq \varepsilon$. [1] Per quanto detto, $\exists N : n > N$, $0 < f(\beta_n) < \varepsilon$ e quindi

[1]Infatti, se $q = \frac{m}{n}$ (con m, n come sopra), si ha che

$$f(q) = \frac{1}{n} \geq \varepsilon \Longleftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

e quindi, i razionali (della forma suddetta) che soddisfano tale proprietà sono esattamente

$$\Phi = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right) < \infty$$

dove $\varphi(n)$ indica la funzione di Eulero (cioè il numero dei numeri primi con n, minori di n).

$\lim_{n\to+\infty} f(\beta_n) = 0 = f(\alpha)$, che è la tesi.

2. Per dimostrare che $f \in \mathcal{R}([0,1])$, facciamo vedere che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1, f_2$ funzioni a scalini, tc $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ $\forall x \in [0,1]$ e $\int_{[0,1]} (f_2 - f_1) < \varepsilon$. Consideriamo le seguenti funzioni:
   - $f_1 \equiv 0$; ovviamente $f_1(x) \le f(x)$ $\forall x \in [0,1]$.
   - Costruiamo f_2 nel seguente modo: sia $N \ge 3$ fissato; Ovviamente i numeri razionali $q_j = \frac{m_j}{n_j}$ con $f(q_j) > \frac{1}{N}$ sono in numero finito Φ[2]. Sia $\delta \equiv \inf_{1\le i<j\le\Phi} |q_i - q_j|$ e sia invece $h_j = \frac{1}{n_j} - \frac{1}{N} > 0$. Detto $b_j \equiv \min\{\delta, \frac{1}{2h_j N\Phi}\}$, definiamo la nostra funzione nel seguente modo:

     $$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_j} & \text{se } x \in (q_j - b_j, q_j + b_j) \\ \frac{1}{N} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

     Osserviamo che questa funzione è ben definita, in quanto per la nostra scelta dei b_j, gli intervallini sopra sono disgiunti; inoltre f_2 è una funzione a scalini.

   Concludendo:

   $$\int_{[0,1]} (f_2 - f_1) = \int_0^1 f_2 = \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{\Phi} h_j 2b_j \le \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{\Phi} h_j 2\frac{1}{2h_j N\Phi} = \frac{2}{N}.$$

   Dall'arbitrarietà di N segue l'asserto.

Esercizio 61. A è Peano-Jordan misurabile $\iff$ la funzione caratteristica χ_A è Riemann integrabile $\iff$ (per def. di integrabilità) $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists f_1, f_2$ funzioni a scalini tc $f_1(x) \le \chi_A(x) \le f_2(x)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} (f_2 - f_1) < \varepsilon$.
Siano:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sum_{n=1}^{N_1} \chi_{R_n^1}(x) & \text{con } \{R_n^1\}_{n=1}^{N_1} \text{ rettangoli disgiunti} \\ f_2(x) = \sum_{n=1}^{N_2} \chi_{R_n^2}(x) & \text{con } \{R_n^2\}_{n=1}^{N_2} \text{ rettangoli disgiunti} \end{array}$$

Quindi f_1 e f_2 assumono valori in $\{0,1\}$: esattamente f_1 vale 1 su $E_1 = \cup_{n=1}^{N_1} R_n^1$, mentre f_2 vale 1 su $E_2 = \cup_{n=1}^{N_2} R_n^2$ (con E_1, E_2 insiemi elementari).
Poichè $f_1(x) \le \chi_A(x)$, allora :

$$x \in E_1 \Longrightarrow f_1(x) = 1 \Longrightarrow \chi_A(x) = 1 \Longrightarrow x \in A$$

quindi $E_1 \subset A$.
Analogamente, si dimostra che $A \subset E_2$.
Per concludere, basta osservare che: $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_2 - f_1) < \varepsilon$.

[2] Cfr. nota (1)

Esercizio 62. Cominciamo col dimostrare che ∂A è un insieme P-J misurabile; dal teorema di Lebesgue-Vitali segue che ∂A è un insieme di misura nulla (in quanto rappresenta l'insieme dei punti di discontinuità dell funzione χ_A, che è Riemann integrabile). Quindi, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\{E_n\}_{n\geq 1}$ ricoprimento al più numerabile di ∂A, tc $\sum_{n\geq 1} \text{mis}_n E_n < \varepsilon$. Inoltre A è limitato $\Longrightarrow$ ∂A è un compatto, quindi posso estrasse un sottoricoprimento finito $\{E'_n\}_{n=1}^N$ con $\sum_{n=1}^N \text{mis}_n E'_n \leq \sum_{n\geq 1} \text{mis}_n E_n < \varepsilon$. Da ciò segue che ∂A è un insieme P-J misurabile, con misura nulla.
Adesso osservando che gli insieme P-J misurabile costituiscono un'algebra [3] segue facilmente che $\overline{A} = A \cup \partial A$ e $\overset{o}{A} = A \setminus \partial A$ stanno ancora nell'algebra e quindi sono P-J misurabili.

Esercizio 63. Cominciamo col dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ ha misura nulla. Osserviamo che $\mathbb{Q}^n \cap E$ è un insieme numerabile denso in E, e quindi lo possiamo scrivere nella forma $\mathbb{Q}^n \cap E = \{q_j\}_{j\geq 1}$ con $q_j = (q_j^1, \ldots, q_j^n)$.
$\forall\,\varepsilon > 0$, consideriamo il seguente ricoprimento $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ dove:

$$Q_j = (q_j^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}, q_j^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}) \times \ldots \times (q_j^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}, q_j^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}).$$

Quindi Q_j è un parallelepipedo n-dimensionale con $\text{mis}_n Q_j = \left[2\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Perciò $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ è un ricoprimendo numerabile di $\mathbb{Q}^n \cap E$, con :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \text{mis}_n Q_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Dimostriamo ora che non è Peano-Jordan misurabile (usando l'esercizio 2).
Sia E_1 un insieme elementare tc $E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E$; poichè $\mathbb{Q}^n \cap E$ è totalmente sconnesso, ogni rettangolo contenuto deve essere degenere, quindi E_1 è unione di un numero finito di rettangoli degenere, da cui segue che $\text{mis}_n E_1 = 0$. Perciò:

$$\sup\{\text{mis}_n E_1 : \; E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E \text{ è un insieme elementare}\} = 0.$$

Vediamo ora, come possiamo approssimarlo dall'esterno con insiemi elementari.
Se $E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E$, allora $\overset{o}{E} \subset \overline{E_2}$. Infatti (per assurdo):
se $p \in \overset{o}{E}$ e $p \notin \overline{E_2} \Longrightarrow$ (usando il fatto che $(\overline{E_2})^c$ è aperto) $\exists\,\mathcal{D}_r^n(p) \subset \overset{o}{E} \subset E$ tc $\mathcal{D}_r^n(p) \cap \overline{E_2} = \emptyset$.

[3] $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ si dice un'algebra se:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
3. $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{F}$.

Ma in $\mathcal{D}_r^n(p)$, esistono infiniti elementi di $\mathbb{Q}^n \cap E$ (semplicemente per la densità di $\mathbb{Q}^n$ in E), e questo contraddice il fatto che $E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E$.
Inoltre:

$$\text{mis}_n E_2 = \text{mis}_n \overline{E_2} \geq \text{mis}_n \overset{o}{E} = \text{mis}_n E > 0$$

e quindi:

$$\inf\{\text{mis}_n E_2 : \ E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E \text{ è un insieme elementare}\} \geq \text{mis}_n E > 0.$$

Quindi $\mathbb{Q}^n \cap E$ non può essere P-J misurabile in quanto l'inf e il sup visti sopra, non tendono ad un valore comune; cioè $\forall E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E \subset E_2$ si ha che $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 \geq \text{mis}_n E > 0$, e quindi non può essere resa arbitrariamente piccola.

Esercizio 64.

1. VERO: Se per assurdo si avesse che $\overset{o}{X} \neq \emptyset$, allora esisterebbe $x_0 \in X$ e quindi potrei trovare $D_r(x_0) \subset X$; da cui:

   $$0 = \text{mis}(X) \geq \text{mis}(D_r(x_0)) > 0$$

   che è chiaramente una contraddizione.

2. FALSO: Prendiamo come controesempio $X = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$; dalla densità dei razionali segue che $\overset{o}{X} = \emptyset$, ma X non è un insieme di misura nulla (tra l'altro non è Peano Jordan misurabile): infatti se fosse di misura nulla avrei

   $$1 = \text{mis}([0,1]) = \text{mis}(X \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})) = \text{mis}(X) + \text{mis}([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

   che è assurdo!

3. VERO: dalla definizione di insiemi di misura nulla segue che $\forall \epsilon > 0$ esistono $\{X_n\}_n$, $\{Y_m\}_m \subset \mathbb{R}$ ricoprimenti con rettangoli tali che:

   $$\begin{array}{ll} Q_x \subset \cup_n X_n & \sum_n \text{mis} X_n < \epsilon \\ Q^y \subset \cup_m Y_m & \sum_m \text{mis} Y_m < \epsilon. \end{array}$$

   Consideriamo ora il seguente ricoprimento di $Q_x \times Q^y$ con rettangoli: $\{X_n \times Y_m\}_{n,m}$; si hanno le seguenti proprietà:

   $$Q_x \times Q^y \subset \cup_{n,m} X_n \times Y_m \text{ e } \sum_{n,m} \text{mis}(X_n \times Y_m) = \sum_n \sum_m (\text{mis}(X_n) \cdot \text{mis}(Y_m)) =$$

   $$\sum_n \text{mis}(X_n) \cdot \sum_m \text{mis}(Y_m) < \epsilon^2$$

   da cui segue che tale insieme ha misura nulla.

4. FALSO: prendiamo ad esempio $Q = \{0\} \times \mathbb{R}$ (cioè l'asse delle y). Se consideriamo $x = 0$ allora si ha $Q_0 = \mathbb{R}$ che non è di misura nulla (non è nemmeno P-J misurabile!).
(Cfr. [C] esercizio E.9.23 e la soluzione proposta in appendice B).

Esercizio 65. Consideriamo il caso della successione convergente e sia $l = \lim_n x_n$.
Ovviamente si tratta di un insieme di misura nulla: infatti ogni insieme numerabile è di misura nulla. Facciamo vedere che è anche P-J misurabile (cioè che per ogni $\epsilon > 0$ riusciamo a trovare un ricoprimento FINITO con rettangoli $\{R_n\}_{n=1}^N$ t.c. $\sum_{n=1}^N \text{mis}(R_n) < \epsilon$). Questo segue semplicemente dalla definizione di limite; infatti $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N > 0$ t.c. $x_n \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$ per ogni $n \geq N$.
Consideriamo quindi il seguente ricoprimento finito:

$$\begin{array}{ll} R_k = \{x_k\} & \text{per } k < N \\ R_N = [l - \epsilon, l + \epsilon] & \end{array}$$

Si vede chiaramente che soddisfa le hp elencate sopra!
Nel caso di una successione non convergente, possiamo ancora dire che si tratta di un insieme di misura nulla (in quanto rimane un insieme numerabile), ma non sarà più vero in generale che è Peano Jordan misurabile. (Considerare ad esempio la successione $\{x_n = n\}_n$ oppure la successione dei razionali in $[0, 1]$).

2.2 Integrali iterati

Esercizio 66.

i)	$\frac{9}{4}$	
ii)	$\frac{\pi}{24}$	(Sugg: usare le coordinate polari)
iii)	$\frac{e}{4} - \frac{1}{2}$	(Sugg: $D \equiv \{0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 1\} \ = \ \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$)
iv)	$\frac{1}{12}$	(Sugg: $D \equiv \{0 \leq x \leq 1,\ 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$)

Esercizio 67. Osservazione: é sufficiente calcolare soltanto il primo integrale; infatti:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx = -\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} dx = \int_0^1 dx' \int_0^1 \frac{x' - y'}{(x' + y')^3} dy'$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il cambio di coordinate $x' = y$ e $y' = x$. Il fatto che non si possa invertire l'ordine d'integrazione e'dovuto alla non uniforme continuità della funzione integranda in tale dominio (vedi le ipotesi delle formule di riduzione).

Esercizio 68.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int_1^2 x^2\,dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2}\,dy = \\
&= \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 x^2 \left[x - \frac{1}{x}\right] dx = \\
&= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 69. Osserviamo innanzitutto che il dominio D si può scrivere come dominio *normale rispetto alle* x:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\right\}\ ;$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\iint_D y^3 e^x\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y^3 e^x\,dy = \int_0^1 y^3\,dy \int_{y^2}^1 y^3 e^x\,dy = \\
&= \int_0^1 y^3\left(e - e^{y^2}\right) dy = \int_0^1 y^3 e\,dy - \int_0^1 y^3 e^{y^2} = \\
&= \frac{e}{4} - \left[\frac{y^2}{2} e^{y^2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{y^2} y\,dy = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\left[e^{y^2}\right]_0^1 = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 70. Osserviamo innanzitutto che il dominio D si può scrivere come dominio *normale rispetto alle* y:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}\ ;$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy = \\
&= \int_0^1 x\,dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1-x^2-(1-x)^2\right] dx = \\
&= \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \\
&= \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 71. Cominciamo a trovare i punti di intersezione tra le varie curve (ovviamente tutte si incontrano nell'origine 0):

$$
\begin{cases} y = \dfrac{x}{a} \\ y = a^2x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A_a = \left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}\right)
$$

$$
\begin{cases} y = ax \\ y = a^2x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B_a = \left(\frac{1}{a}, 1\right).
$$

La regione R_a racchiusa da queste curve è una "*regione triangolare*", di vertici O, A_a e B_a. Calcoliamone l'area:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(a) &:= \operatorname{Area}(R_a) = \iint_{R_a} dx\,dy = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} dx \int_{\frac{x}{a}}^{ax} dy + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} dx \int_{a^2x^2}^{ax} dy = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} \left(ax - \frac{x}{a}\right) dx + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} \left(ax - a^2x^2\right) dx = \\
&= \frac{1}{6a}\left[1 - \frac{1}{a^6}\right].
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

$$
\lim_{a\to 1^+} \mathcal{A}(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{a\to +\infty} \mathcal{A}(a) = 0
$$

quindi deve ammettere un punto di massimo (per $a > 1$). Studiando la derivata prima:

$$
\mathcal{A}'(a) = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{a^2} + \frac{7}{a^8}\right]
$$

che si annulla per $a = \pm\sqrt[6]{7}$; quindi il massimo che stiamo cercando è per $a = \sqrt[6]{7}$, dove l'area vale

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\max} &= \frac{1}{6\sqrt[6]{7}}\left[1-\frac{1}{7}\right] = \\ &= \frac{1}{6\sqrt[6]{7}}\frac{6}{7} = \\ &= \frac{1}{7\sqrt[6]{7}}.\end{aligned}$$

Esercizio 72. Considerare il cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$$

con $(\varphi,\theta) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$ e $0<\rho<1$. Il determinante Jacobiano risulta quindi:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| = abc\rho^2\sin\varphi.$$

Con tale sostituzione, si ottiene facilmente che:

$$\iiint_{\mathcal{D}} x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

Esercizio 73.

- Indichiamo con $B_3^{(1)}(0,1) \equiv \{x\in\mathbb{R}^3:\ \|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+|x_3|\le 1\}$ e quindi:
  $B_3^{(1)}(0,1)\cap\{x_i\ge 0,\ i=1,2,3\} = \{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2+x_3\le 1\} = \{x\in\mathbb{R}^3:\ 0\le x_3\le 1,\ 0\le x_2\le 1-x_3,\ 0\le x_1\le 1-x_3-x_2\}$.
  Per la simmetria del problema si ha che:

$$\mathrm{Vol}(B_3^{(1)}(0,1)) = \int_{B_3^{(1)}(0,1)} dx_1dx_2dx_3 = 8\int_{B_3^{(1)}(0,1)\cap\{x_i\ge0,\ i=1,2,3\}} dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= 8\int_0^1 dx_3\int_0^{1-x_3} dx_2\int_0^{1-x_3-x_2} dx_1 = \frac{4}{3} = \frac{2^3}{3!}.$$

- Vediamo cosa succede ora in dimensione 4:
  $B_4^{(1)}(0,1) \equiv \{x\in\mathbb{R}^4:\ \|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|\le 1\} = \{x\in\mathbb{R}^4:\ -1\le x_4\le 1,\ (x_1,x_2,x_3)\in B_3^{(1)}(0,1-|x_4|)\}$
  quindi:

$$\mathrm{Vol}(B_4^{(1)}(0,1)) = \int_{B_4^{(1)}(0,1)} dx_1dx_2dx_3dx_4 = \int_{-1}^1 dx_4\int_{B_3^{(1)}(0,1-|x_4)|)} dx_1dx_2dx_3 =$$

Usando il cambio di coordinate $x'_i = \frac{x_i}{1-|x_4|}$ (con $i = 1, 2, 3$) si ottiene:

$$= \int_{-1}^{1} dx_4 \int_{B_3^{(1)}(0,1)} (1 - |x_4|)^3 \, dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}(1 - |x_4|)^3 dx_4 = \frac{2^4}{4!}.$$

- Procedendo per induzione su n si ottiene che $\mathrm{Vol}(B_n^{(1)}(0,1)) = \frac{2^n}{n!}$.

Esercizio 74. 1. Osserviamo che $\mathcal{D}_2 = \{0 \leq x_2 \leq 1, \ 0 \leq x_1 \leq x_2\}$. Quindi:

$$\mathbb{I}_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_1 = \frac{1}{8} = \frac{1}{4!!}.$$

2. Definiamo $\mathcal{D}_2(r) \equiv \{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq r\}$. Quindi:

$$\mathcal{D}_3 = \{0 \leq x_3 \leq 1, \ (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_2(x_3)\}.$$

Considerando il cambio di variabili $x'_i = \frac{x_i}{x_3}$ con $i = 1, 2$, abbiamo:

$$\mathbb{I}_3 = \int_0^1 x_3 \, dx_3 \int_{\mathcal{D}_2(x_3)} x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^1 x_3 \, dx_3 \int_{\mathcal{D}_2} x_3^4 \, x'_1 \, x'_2 \, dx'_1 \, dx'_2 =$$

$$\int_0^1 x_3^5 \mathbb{I}_2 \, dx_3 = \frac{1}{48} = \frac{1}{6!!}.$$

3. Generalizzando in maniera analoga a quanto fatto nel punto precedente, si dimostra che $\mathbb{I}_n = \frac{1}{(2n)!!}$ [4].

Esercizio 75. Innanzitutto osserviamo che per $(x, y) \in D$ (con D denotiamo il disco unitario in $\mathbb{R}^2$) si ha che

$$x^2 + y^2 - 2 \leq -1 \qquad \text{e} \qquad 4 - (x + y) \geq 2\,,$$

da cui possiamo concludere che

$$x^2 + y^2 - 2 \leq 4 - (x + y)\,,$$

cioè la base superiore di tale regione è rappresentata dalla porzione di piano $z = 4 - (x + y)$ *intercettata* dal cilindro, mentre la base inferiore dalla porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$.
Quindi la nostra regione R può essere scritta in *forma normale* nel seguente modo:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - (x + y)\}.$$

[4] Dove $(2n)!! \equiv (2n) \cdot 2(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n n!$

Possiamo quindi calcolarne il volume applicando le formule di riduzione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \iiint_R dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{x^2+y^2-2}^{4-(x+y)} dz = \\
&= \iint_D \left[4-(x+y)-(x^2+y^2-2)\right] dx\,dy = \\
&= \iint_D \left[6-(x+y)-(x^2+y^2)\right] dx\,dy = \ (*)
\end{aligned}$$

passando in coordinate polari, ed utilizzando il fatto che $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho\left[6-(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)-\rho^2\right] d\theta = \\
&= \int_0^1 2\pi\rho\left[6-\rho^2\right] d\rho = \\
&= 2\pi\left[6\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = \\
&= \frac{11}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 76.

1. Descriviamo la regione E in coordinate polari (ρ, θ). Innanzitutto, il fatto che $x \geq 0$ implica una prima limitazione per la variabile angolare θ, cioè $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Scriviamo ora la relazione $(x^2+y^2)^2 \leq (x^2-y^2)$ in coordinate polari (usando la relazione $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$):

   $$\rho^4 \leq \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho^2 \leq \cos 2\theta\,.$$

   Osserviamo che la relazione sopra ha senso soltanto per valori di θ per cui $\cos 2\theta \geq 0$, cioè $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. In conclusione, la rappresentazione di E in coordinate polari è data da:

   $$E^{(\mathrm{pol})} = \left\{(\rho,\,\theta): \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ \rho^2 \leq \cos 2\theta\right\}.$$

   Volendo graficarla, otterremo una regione a forma di "petalo" compresa tra le bisettrici del I e IV quadrante, simmetrica rispetto all'asse delle x, con "vertice" in $(0,0)$ e passante per $(1,0)$.

2. Determiniamo l'area di E, utilizzando la rappresentazione in coordinate

polari:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(E) &= \iint_E dx\,dy = \int_{E^{(\text{pol})}} \rho\,d\rho\,d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,d\rho = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \\
&= \frac{1}{4}[\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

3. Osserviamo che l'insieme E_k si può scrivere in coordinate polari:

$$E_k^{(\text{pol})} = \left\{(\rho,\,\theta) : \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ \rho^2 \leq k^2\cos 2\theta\right\},$$

mentre in coordinate cartesiane:

$$E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq k^2(x^2-y^2)\}\,.$$

Usando la rappresentazione in coordinate polari, si calcola facilmente l'area (procedendo come già fatto per E):

$$\begin{aligned}
\text{Area}(E_k) &= \iint_{E_k} dx\,dy = \int_{E_k^{(\text{pol})}} \rho\,d\rho\,d\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{k\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,d\rho = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} k^2\cos 2\theta\,d\theta = \\
&= \frac{1}{4}[k^2\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{k^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

4. Calcoliamo ora il volume di G. A tal fine osserviamo che G può anche essere definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq (1-z^2)(x^2-y^2),\ |z| \leq 1\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |z| \leq 1,\ (x,y) \in E_{\sqrt{1-z^2}}\}\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(G) &= \iint_G dx\,dy\,dz = \\
&= \int_{-1}^{1} dz \int_{E_{\sqrt{1-z^2}}} dx\,dy\ = \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(E_{\sqrt{1-z^2}})dz\ = \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1-z^2}{2}\,dz = \\
&= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 77. Consideriamo il cambio di coordinate suggerito:

$$\Phi(x,y) \equiv \begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y + x^3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi^{-1}(u,v) \equiv \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{v-u}{2}} \\ y = \frac{v+u}{2}\,. \end{cases}$$

Il determinante Jacobiano è dato da:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{|v-u|^{-\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{2}}.$$

Osserviamo inoltre che tale trasformazione agisce nel seguente modo sul dominio $\mathcal{T}$:

$$\Phi^{-1}(\mathcal{T}) \equiv \{(u,v):\ 0 \le u \le 2,\ 2+u \le v \le 6-u\}.$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{T}} x^2(y-x^3)e^{y+x^3}\,dx\,dy &= \frac{1}{6}\int_{\Phi^{-1}(\mathcal{T})} u\,e^v\,du\,dv = \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 du \int_{2+u}^{6-u} u\,e^v\,dv = \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 u\left[e^{6-u} - e^{2+u}\right]\,du = \\
&= \frac{e^6}{6} - \frac{2e^4}{3} - \frac{e^2}{6}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 78. Detto Δ il solido ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse z, possiamo rappresentarlo nel seguente modo come dominio normale usando le coordinate cilindriche:

$$\Delta = \{(\rho,\theta,z):\ \theta \in (0,2\pi),\ (\rho,z) \in D\}.$$

Quindi:

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = \iiint_\Delta dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_D \rho\,d\rho\,dz = 2\pi \iint_D x\,dx\,dz =$$

Ricordando ora che le coordinate del baricentro di D sono date da $(x_b, z_b) = \frac{1}{\iint_D dx\,dz}\left(\iint_D x\,dx\,dz,\ \iint_D z\,dx\,dz\right)$ si ha:

$$= 2\pi \frac{\iint_D x\,dx\,dz}{\iint_D dx\,dz} \iint_D dx\,dz = 2\pi x_b \mathrm{mis}(D).$$

Applicando ora il teorema appena dimostrato ai solidi di rotazione sotto riportati (con un'opportuna scelta di D) si ottengono le seguenti espressioni dei volumi:

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$;
2. $2\pi^2 a r^2$;
3. $\pi r^2 h$;
4. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$;
5. $\frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$.

Esercizio 79. Osservare che in coordinate sferiche il dominio è dato da:

$$\Phi^{-1}(D) \equiv \{(\rho, \theta, \varphi) :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \rho\cos\varphi \ge \rho\sin\varphi\} =$$

$$= \{(\rho, \theta, \varphi) :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Calcolando l'integrale in coordinate sferiche (osservando che il modulo del determinante Jacobiano è $\rho^2 \sin\varphi$) si ottiene che è uguale a $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

Esercizio 80. Osserviamo che il dominio di integrazione, si può scrivere:

$$D \equiv \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 - 2y \le 0,\ 0 \le z \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\}$$

Quindi ponendo $A \equiv \{(x, y) :\ x^2 + y^2 - 2y \le 0\}$ (che non è altri che un cerchio nel piano x, y di centro $C = (0, 1, 0)$ e raggio 1) si ha:

$$\iiint_D x\sqrt{|yz|}\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_0^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)} x\sqrt{|y|}\sqrt{z} \right) dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} \iint_A x\sqrt{|y|}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy.$$

Scrivendo A in coordinate polari (cioè $T^{-1}(A) = \{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}$), e calcolando l'integrale ottenuto si ottiene che il risultato è uguale a 0.

Esercizio 81. Basta considerare $D_k = \{(x,y):\ 0 < x < k,\ x < y < k\}$. Segue facilmente che f è integrabile su D_k per ogni k e che:

$$\int_D xe^{-xy}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\int_{D_k} xe^{-xy}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Esercizio 82. Per cominciare ricaviamo alcune informazioni relative all'insieme F_p. Consideriamo un valore $z_0 \in (0,1)$ e studiamo la sezione che si ottiene intersecando F_p con il piano $z = z_0$:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = z_0^{2p} \end{cases}$$

si ottiene una circonferenza di centro $C_{z_0} = (0,0,z_0)$ e raggio z_0^p. Osserviamo inoltre che i raggio di queste sezioni crescono al crescere di z_0, secondo la legge z^p. Quindi si tratta di una figura[5] *simile* ad un cono capovolto (con vertice nell'origine) e base sul piano $z = 1$ (il raggio di base è 1). Al variare di p varia la velocità con cui crescono questi raggi e quindi varierà il *profilo* di tale cono:

- Per $0 < p < 1$ la funzione z^p ha la *concavità rivolta verso l'asse delle* z (in quanto i raggi crescono abbastanza lentamente), quindi F_p ha una forma simile ad un *paraboloide* (che corrisponde al caso $p = \frac{1}{2}$), cioè a mo' di *recipiente concavo.*
- Per $p = 1$ abbiamo esattamente un cono circolare retto.
- Per $p > 1$ la funzione z^p ha la *concavità rivolta verso il piano* xy (in quanto i raggi crescono più velocemente), quindi F_p ha una forma simile ad un *imbuto.*

Passiamo ora allo studio dell'integrabilità della funzione z^α su tali domini F_p (al variare di $p > 0$). Chiaramente non c'è alcun probleme quando $\alpha \geq 0$ (la funzione è continua e limitata su F_p). I problemi sorgono quando consideriamo valori negativi di α (in tal caso la funzione non è più limitata su F_p: ha infatti un polo nell'origine).
Consideriamo quindi una famiglia *crescente* di compatti $\{K_n\}_n$, che *invadono* tutto F_p (cioè ogni compatto in F_p è definitivamente contenuto negli elementi di tale famiglia); poiché la funzione in esame è una funzione positiva (su F_p) ci basterà considerare

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{K_n} z^\alpha\,dx\,dy\,dz\,.$$

Definiamo per $n > 1$:

$$K_n \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\quad \frac{1}{n} < z < 1\,,\ x^2 + y^2 \leq z^{2p}\}\,;$$

[5] Questa descrizione abbastanza colorita è dovuta al fatto di non poter/voler aggiungere delle figure!

ovviamente si tratta di una famiglia crescente di compatti ($K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n > 1$) e invadono (al variare di n) tutto F_p. Inoltre la funzione è continua e limitata (e quindi integrabile) su tali domini. Calcoliamo il valore di tale integrale per $n > 1$:

$$\begin{aligned}
\iiint_{K_n} z^\alpha \, dx\, dy\, dz &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dz \iint_{x^2+y^2 \le z^{2p}} z^\alpha \, dx\, dy = \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^\alpha \operatorname{Area}(B^2_{z^p}(0))\, dz = \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^\alpha \, \pi z^{2p}\, dz = \\
&= \pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} z^{\alpha+2p}\, dz = \\
&= \begin{cases} \pi \, [\log z]_{\frac{1}{n}}^{1} & \text{se } \alpha + 2p = -1 \\ \pi \left[\frac{z^{\alpha+2p+1}}{\alpha+2p+1}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} & \text{se } \alpha + 2p \neq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi \, \log n & \text{se } \alpha + 2p = -1 \\ \frac{\pi}{\alpha+2p+1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha+2p+1}}\right] & \text{se } \alpha + 2p \neq -1\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vediamo cosa succede passando al limite per $n \to +\infty$:

$$\iiint_{K_n} z^\alpha \, dx\, dy\, dz \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha + 2p = -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha + 2p < -1 \\ \frac{\pi}{\alpha+2p+1} & \text{se } \alpha + 2p > -1\,. \end{cases}$$

Concludendo, la funzione z^α è integrabile su F_p se e solo se $a > -1 - 2p$ e in tal caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha+2p+1}$.

2.3 Integrazione su varietà di $\mathbb{R}^n$ e forme differenziali

Esercizio 83. Osserviamo che la curva Γ ha la seguente parametrizzazione:

$$\Phi(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in I = (1, 2).$$

Quindi $\Gamma = \Phi(I)$ con $\Phi \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ e iniettiva, ed inoltre $\dot{\Phi}(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0, 0, 0)$, $\forall\ t \in \overline{I}$. Questo dimostra che Γ è un elemento regolare di varietà 1-dimensionale, cioè un elemento di curva regolare.

Calcoliamo il seguente integrale superficiale:

$$\int_\Gamma f d\sigma_1 = \int_1^2 \frac{\log t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \sqrt{1+4t^2+9t^4}\, dt = 3(\log 4 - 1).$$

Esercizio 84. Osserviamo che $\mathcal{S} = \Phi(A)$, dove $A = (a,b) \times (0,\alpha)$ e $\Phi(t,\theta) = (u(t)\cos\theta, u(t)\sin\theta, v(t)) \in \mathcal{C}^1(\overline{A})$ è una funzione iniettiva (queste proprietà si dimostrano facilmente, ricordando che Γ è una curva regolare in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, e quindi la sua parametrizzazione $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ soddisfa queste proprietà di regolarità e iniettività).
Calcoliamo l'area di tale superficie:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\sigma_2 = \int_A \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right| dt\, d\theta =$$

osserviamo che $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right| = u(t)\, \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}$ (notare che per hp $u(t) > 0$), quindi

$$= \alpha \int_a^b u(t)\, \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}\, dt.$$

Osserviamo che quest'ultimo integrale si può anche riscrivere come integale curvilineo:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \alpha \int_\Gamma x\, d\sigma_1.$$

Se moltiplichiamo e dividiamo per la lunghezza di Γ, $l(\gamma)$, otteniamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \alpha\, l(\gamma)\, \frac{1}{l(\gamma)} \int_\Gamma x\, d\sigma_1 = \alpha\, l(\gamma)\, x_b$$

avendo indicato con x_b l'ascissa del baricentro della curva Γ. Quindi riassumendo, possiamo interpretare questo risultato nel seguente modo:
L'area della superficie ottenuta ruotando di un angolo α una certa curva Γ con le proprietà suddette, non è altro che la lunghezza di Γ per la lunghezza dell'arco di circonferenza, percorso dal suo baricentro durante tale rotazione.[6]

Esercizio 85. Una parametrizzazione per la curva γ è data da:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\, \cos\theta \;=\; a\,(1 + \cos\theta)\, \cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\, \sin\theta \;=\; a\,(1 + \cos\theta)\, \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in (0, 2\pi)\,.$$

Per trovare la lunghezza di γ, dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$lungh\,(\gamma) \;=\; \int_\gamma ds \;:=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\theta\,.$$

Osserviamo che

$$\{\; x'(\theta) = \rho'(\theta)\, \cos\theta - \rho(\theta)\, \sin\theta y'(\theta) = \rho'(\theta)\, \sin\theta + \rho(\theta)\, \cos\theta\,,$$

[6] Cfr: Tutorato III, esercizio 3 - teorema di Guldino -

quindi

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x'^2+y'^2} &= \sqrt{(\rho'(\theta)\,\cos\theta-\rho(\theta)\,\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\,\sin\theta+\rho(\theta)\,\cos\theta)^2} = \\
&= \sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2} = \\
&= \sqrt{a^2\,\sin^2\theta+a^2\,(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)} = \\
&= a\sqrt{2+2\,\cos\theta} = \\
&= 2a\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \\
&= 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione:

$$
\begin{aligned}
lungh\,(\gamma) &= \int_\gamma ds \,:=\, \int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta = \\
&= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \\
&= 8a\left[-\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \\
&= 8a\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 86. Cominciamo col trovare una parametrizzazione per tale superficie $\partial\mathbb{T}^3$. Data la simmetria del problema, introduciamo nel piano x, y le coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Considerando un generico asse ρ (ρ misura la distanza dall'asse z), la circonferenza nel piano ρ, z si rappresenta in coordinate polari nella forma

$$
\rho = R + r\cos\varphi_\epsilon, \quad z = r\sin\varphi_\epsilon \qquad \varphi_\epsilon\in(0,2\pi)\,.
$$

Ne segue che una rappresentazione parametrica della superficie del toro è data da:

$$
X(\theta,\varphi_\epsilon)\equiv\begin{cases} x=(R+r\cos\varphi_\epsilon)\cos th \\ y=(R+r\cos\varphi_\epsilon)\sin th \\ z=r\sin\varphi_\epsilon \end{cases} \qquad \theta,\,\varphi_\epsilon\,\in\,(0,2\pi)\,.
$$

Si verifica immediatamente che la funzione X è di classe C^1 (in realtà è molto più regolare!) ed iniettiva (segue dal significato geometrico degli angoli θ e φ_ϵ). Osserviamo inoltre che in questo modo non abbiamo parametrizzato tutta la superficie del toro, ma abbiamo escluso due circonferenze (quella corrispondente

a $\theta = 0$ e quella relativa a $\varphi_\epsilon = 0$); questo non inficia il risultato, in quanto stiamo escludendo degli insiemi aventi *misura* nulla, che non contribuiscono quindi significativamente al calcolo dell'area.
Per trovare tale area, dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$Area\,(\partial \mathbb{T}^3) \;=\; \iint_{dpr\mathbb{T}^3} d\sigma \;:=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \|X_\theta \wedge X_{\varphi_\epsilon}\|\, d\varphi_\epsilon\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-(R + r\cos\varphi_\epsilon)\sin\theta,\, -(R + r\cos\varphi_\epsilon)\cos\theta,\, 0) \\ X_{\varphi_\epsilon} &= (-r\sin\varphi_\epsilon\cos\theta,\, -r\sin\varphi_\epsilon\sin\theta,\, -r\cos\varphi_\epsilon) \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} X_\theta \wedge X_{\varphi_\epsilon} &= \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -(R + r\cos\varphi_\epsilon)\sin\theta & -(R + r\cos\varphi_\epsilon)\cos\theta & 0 \\ -r\sin\varphi_\epsilon\cos\theta & -r\sin\varphi_\epsilon\sin\theta & -r\cos\varphi_\epsilon \end{pmatrix} = \\ &= r\,(R + r\cos\varphi_\epsilon)\,\cdot\,(-\cos\theta\,\cos\varphi_\epsilon,\; -\sin\theta\,\cos\varphi_\epsilon,\; \sin\varphi_\epsilon)\;. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che:

$$\|X_\theta \wedge X_{\varphi_\epsilon}\| \;=\; r\,(R + r\cos\varphi_\epsilon)\,.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} Area\,(\partial \mathbb{T}^3) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \|X_\theta \wedge X_{\varphi_\epsilon}\|\, d\varphi_\epsilon = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r\,(R + r\cos\varphi_\epsilon)\, d\varphi_\epsilon = \\ &= 4\pi^2 rR\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che si poteva anche procedere utilizzando il teorema di Guldino, giungendo allo stesso risultato.

Esercizio 87. Vogliamo verificare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$, cioè mostrare la seguente uguaglianza:

$$\int_A \mathrm{div} f\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot \nu\, d\sigma_1\,,$$

dove con ν intendiamo il versore normale esterno al bordo $\partial\, A$. Cominciamo col calcolare l'integrale al primo membro di tale uguaglianza (passando il coordinate polari, con origine nel punto $(2,0)$):

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div} f\, dx\, dy &= \int_A [\partial_x(1+xy) + \partial_y(x)]\, dx\, dy = \\ &= \int_A y\, dx\, dy = \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che ∂A è una varietà (una curva) costituita da due tratti regolari, che possiamo parametrizzare nel seguente modo:

$$\partial A_1 = \{(t,0)\ 1 < t < 3\} \quad \text{e} \quad \partial A_2 = \{(2+\cos\theta, \sin\theta)\ 0 < \theta < \pi\}\,;$$

osserviamo che tale parametrizzazione orienta il bordo ∂A positivamente. Osserviamo che i versori normali esterni a ∂A_1 e ∂A_2 (che indicheremeo rispettivamente con ν_1 e ν_2) sono dati da:

$$\nu_1 = (0,-1) \qquad \text{e} \qquad \nu_2 = (\cos\theta,\, \sin\theta)\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} f\cdot\nu\, d\sigma_1 &= \int_{\partial A_1} f\cdot\nu_1\, d\sigma_1 + \int_{\partial A_2} f\cdot\nu_2\, d\sigma_1 = \\ = &\int_1^3 (-t)\, dt + \int_0^\pi (1+(2+\cos\theta)\sin\theta, 2+\cos\theta)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\, d\theta = \\ = &\ \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

E questo dimostra l'uguaglianza iniziale.

Esercizio 88. Indichiamo con $\Phi^+_{\partial\Omega}(F)$ il flusso esterno del campo vettoriale F attraverso la superficie $\partial\Omega$, dove per definizione di flusso si ha che:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_{\partial\Omega} F\cdot\nu\, d\sigma_2\,,$$

dove con ν indichiamo il versore normale esterno alla superficie $\partial\Omega$. Quindi applicando il teorema della divergenza (osserviamo che $\operatorname{div}F = 3$), ed il fatto che Vol(Ω)=1, otteniamo:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_\Omega \operatorname{div}F\, dx = 3\mathrm{Vol}(\Omega) = 3.$$

Esercizio 89. 1. ω è definita su tutto $\mathbb{R}^3$, ed è chiusa e quindi esatta (in quanto il dominio è semplicemente connesso). Una primitiva è data da: $f(x,y,z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2}$.

2. ω è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non è chiusa (infatti $\partial_y \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$, e quindi non può essere esatta.

3. ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ed è chiusa e quindi esatta (in quanto il dominio è semplicemente connesso). Una primitiva è data da: $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$.

4. Si verifica facilmente che:

$$\omega \text{ è chiusa} \iff \begin{cases} A = D \\ B = -C \end{cases} .$$

Osserviamo che ω è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso, per cui chiusura $\not\Longrightarrow$ esattezza.
Procediamo quindi nel seguente modo:

(a) Per ogni γ curva chiusa che non gira intorno all'origine, si ha che $\int_\gamma \omega = 0$, in quanto ω è localmente esatta, cioè è esatta in ogni dominio semplicemente connesso, contenuto nel suo insieme di definizione;

(b) Se γ è una curva che compie un giro intorno all'origine in senso antiorario, detta C la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente, si ha che:

$$\int_\gamma \omega = \int_C \omega .$$

(Quest'ultimo risultato segue facilmente applicando le formule di Gauss Green nel piano, ed il fatto che è una forma chiusa).

Da queste considerazioni, si deduce il seguente fatto:

$$\omega \text{ è esatta} \iff \int_C \omega = 0 .$$

Imponendo quest'ultima condizione si ottiene che:

$$\omega \text{ è esatta} \iff \begin{cases} A = D \\ B = C = 0 \end{cases} .$$

In tal caso una primitiva è data da $f_A(x,y) = A \log \sqrt{x^2+y^2}$.

Esercizio 90. Si verifica che: $\int_\varphi \omega = \frac{1}{3}$.

Esercizio 91. Comiciamo con l'osservare che $\mathcal{T}$ è un ottaedro (cioè la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$, nella metrica indotta dalla $\|\cdot\|_1$). I vertici di tale ottaedro sono le intersezioni con gli assi coordinati: $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$. Osserviamo inoltre che $\mathcal{T}$ è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati.

1. Integriamo sezionando $\mathcal{T}$ parallelamente al piano xy, ottenendo (si osservi che la z-sezione di $\mathcal{T}$ è $\mathcal{T}(z) = \{(x,y) : |x|+|y| \le 1-|z|\}$, quadrato con lato lungo $\sqrt{2}(1-|z|)$):

$$\int_{\mathcal{T}} |z|^\gamma \,dx\,dy\,dz \;=\; \int_{-1}^{1} |z|^\gamma \,dz \int_{\mathcal{T}(z)} dx\,dy \;=\; \int_{-1}^{1} |z|^\gamma 2(1-|z|)^2 \,dz \;=$$

$$= 4\int_0^1 \left(z^\gamma - 2z^{\gamma+1} + z^{\gamma+2}\right) dz \;=$$

l'ultimo integrale esiste finito se e solo se $\gamma > -1$, e vale:

$$= 4\left(\frac{1}{\gamma+1} - \frac{2}{\gamma+2} + \frac{1}{\gamma+3}\right) = \frac{8}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}.$$

2. Poichè la funzione integranda è somma di funzioni positive, l'integrale è finito se e solo se ciascuno degli addendi ha integrale finito; per la simmetria del dominio rispetto allo scambio di coordinate, si ha che i due integrali $\int_{\mathcal{T}} |x|^\alpha \,dx\,dy\,dz$ e $\int_{\mathcal{T}} |y|^\beta \,dx\,dy\,dz$ esistono finiti se e solo se $\alpha > -1$, $\beta > -1$ e valgono rispettivamente $\frac{8}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$ e $\frac{8}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}$.
Riassumendo: l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > -1$, $\beta > -1$ e $\gamma > -1$, ed in tal caso vale

$$\frac{8}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{8}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)} + \frac{8}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}.$$

3. La divergenza di F è costante e vale $\operatorname{div}F = 3$; per il teorema della divergenza il flusso richiesto vale allora $\int_{\mathcal{T}} 3\,dx\,dy\,dz \;= 3\mathrm{mis}_3(\mathcal{T}) = 4$ (dove il volume di $\mathcal{T}$ è $\frac{4}{3}$ e si ottiene ad esempio dal calcolo fatto in 1) ponendo $\gamma = 0$).

4. Osserviamo che la nostra porzione di superficie, che indicheremo con Σ, può essere parametrizzata nel seguente modo:

$\Sigma = \{(x,y,1-x-y),\ (x,y) \in D\}$ dove $D \equiv \{(x,y) :\ x,y \ge 0\ x+y \le 1\}$.

Inoltre il versore normale a Σ in ogni punto è dato da $\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Quindi il nostro flusso è dato da:

$$\int_\Sigma F \times \nu \,d\sigma \;= \int_D (1,1,1) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\sqrt{3}\,dx\,dy = 3\,\mathrm{Area}(D) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 92. Calcoliamo separatamente i due integrali.

1. Cominciamo calcolando l'integrale sul bordo. Osserviamo che $\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_2$, con

$$\begin{aligned}\partial S_1 &= \{(\cos t,\, \sin t,\, 0),\ 0 \le t < 2\pi\}\\ \partial S_2 &= \{(\cos t,\, \sin t,\, 1),\ 0 \le t < 2\pi\}\,.\end{aligned}$$

   Osserviamo che per orientare ∂S in maniera positiva, dobbiamo orientare il cerchio ∂S_1 (quello alla base inferiore del cilindro) in maniera antioraria (cioè positiva), ed il cerchio ∂S_2 (quello alla base superiore) in maniera oraria (cioè negativa).
   Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial S} \omega &= \int_{+\partial S_1} \omega + \int_{-\partial S_2} \omega = \\ &= \int_{+\partial S_1} \omega - \int_{+\partial S_2} \omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} - \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{2} \right) dt = \\ &= \pi.\end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora l'integrale superficiale. Prendiamo come campo vettoriale:

$$F(x,y,z) = (F_1,\, F_2,\, F_3) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2+z^2},\, \frac{x}{x^2+y^2+z^2},\, 0 \right)\,.$$

   Usando il fatto che $F_3 = 0$ otteniamo che:

$$\operatorname{rot} F = (-\partial_z F_2,\, \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1).$$

   Parametrizziamo S nel seguente modo:

$$S = \{\Phi(t,z) = (\cos t,\, \sin t,\, z) :\ t \in [0, 2\pi),\ z \in [0,1]\}\,;$$

   quindi il versore normale esterno è dato da $\nu = (\cos t,\, \sin t,\, 0)$, mentre $\|\partial_t \Phi \wedge \partial_z \Phi\| = 1$. Applicando il teorema di Stokes otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \times \nu \, d\sigma = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{2z}{(1+z^2)^2} = \\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

Esercizio 93. Cominciamo col capire com'è fatto $\mathcal{C}$. Possiamo descriverlo come $\mathcal{C} = A \cup B$, dove $A \equiv D \times [1,4]$ è il cilindro circolare retto con basi sui piani $z = 1,\ z = 4$ (D è il disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^2$) e B è il segmento di paraboloide rotondo $\{(x,y,z) \in R^3 : \quad (x,y) \in D,\ x^2+y^2 \le z \le 1\}$.

1. Integriamo per fette parallele al piano xy; per $z \in [0,1]$ la z-sezione di $\mathcal{C}$ è il disco $\mathcal{C}(z) \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \leq z\}$ di centro l'origine e raggio $\sqrt{z}$, e quindi di area πz. Per $z \in [1,4]$, invece, $\mathcal{C}(z)$ è costantemente il disco unitario D di R^2, e quindi la sua area è π.

   Quindi:
$$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}) = \int_0^4 \mathrm{Area}(\mathcal{C}(z))\, dz = \frac{7}{2}\pi \ ;$$

2. Essendo $\mathrm{div}F = 1$, il flusso uscente da $\mathcal{C}$ per il teorema della divergenza è uguale al volume di $\mathcal{C}$;

3. Essendo il campo F parallelo al piano xy, il flusso di esso attraverso la porzione di frontiera di $\mathcal{C}$ sul piano $z=4$ è nulla; per la stessa ragione è nullo il flusso di F attraverso il disco $D \times 1$, base inferiore del cilidro A che costituisce $\mathcal{C}$. Il teorema della divergenza applicato ad A ci dice che il flusso del campo uscente da A è pari a 3π; tenendo conto delle osservazioni appena fatte, si ha che tale flusso, coincide proprio con il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro, che è quello che ci interessa.

   Per concludere dobbiamo calcolare il flusso attraverso la porzione di frontiera sul paraboloide; per fare ciò possiamo procedere in vari modi: o come sopra, o usando la definizione oppure facendo la differenza tra il flusso totale, trovato nel punto precedente, e la somma dei flussi finora trovati; in tutti i casi viene $\frac{\pi}{2}$.

4. L'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{z=4\}$ è ovviamente π; l'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{x^2+y^2=1\}$ è ovviamente 6π, essendo l'area laterale di un cilindro circolare retto di raggio di base 1 e altezza 3. Resta da calcolare l'area di $\partial\mathcal{C} \cap \{z = x^2+y^2\}$; questa è una superficie cartesiana con parametrizzazione $(x,y) \to (x,\, y,\, x^2+y^2)$, al variare di $(x,y) \in D$; l'elemento d'area è $\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}dxdy$, pertanto l'area voluta è (useremo le coordinate polari):
$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}dxdy &= \int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \\ &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\sqrt{1+4r^2}drd\theta = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\ . \end{aligned}$$

   L'area della frontiera vale quindi: $7\pi + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

Esercizio 94. 1. Sia $\partial E = A \cup B$, dove:
$$\begin{aligned} A &= \partial E \cap \{x^2+y^2+z^2=1\} \\ B &= \partial E \cap \{z = \sqrt{x^2+y^2}\}\ . \end{aligned}$$

Troviamo una parametrizzazione per queste due superfici regolari:
$$\begin{aligned} A &= \{(\cos\theta \sin\varphi_\epsilon,\, \sin\theta\sin\varphi_\epsilon,\, \cos\varphi_\epsilon) :\ \theta \in (0,2\pi),\ \varphi_\epsilon \in (0,\frac{\pi}{4})\,\} \\ B &= \{(z\cos\theta,\, z\sin\theta,\, z) :\ \theta \in (0,2\pi),\ z \in (0,\frac{1}{\sqrt{2}})\,\}\ . \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$
\begin{aligned}
|A|_2 &= \int_A d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi_\epsilon \, d\varphi_\epsilon = 2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
|B|_2 &= \int_B d\sigma = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, z \, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \,,
\end{aligned}
$$

da cui segue che:

$$
|\partial E|_2 = |A|_2 + |B|_2 = \pi(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \,.
$$

2. Osserviamo innanzitutto che il campo vettoriale F è diretto radialmente e quindi sarà tangente a B in ogni punto, e quindi il flusso attraverso B sarà 0. Calcoliamo invece il flusso uscente attraverso A (osserviamo che in ogni punto di A il campo coincide con il versore normale esterno):

$$
\begin{aligned}
\Phi_A^+(F) &= \int_A F \times \nu_e \, d\sigma = \int_A (x, y, z) \times (x, y, z) \, d\sigma = \\
&= \int_A 1 \, d\sigma = |A|_2 = 2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \,.
\end{aligned}
$$

3. Per quanto visto nel punto precedente, abbiamo che il flusso totale di F, uscente da ∂E è:

$$
\Phi_{\partial E}^+(F) = \Phi_A^+(F) + \Phi_B^+(F) = 2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \,.
$$

Applicando il Teorema delle divergenza si ottiene il risultato richiesto:

$$
\begin{aligned}
2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \Phi_{\partial E}^+(F) = \int_{\partial E} F \times \nu_e \, d\sigma = \\
&= \int_E \mathrm{div} F \, dxdydz = \int_E 3 \, dxdydz = 3\mathrm{Vol}(E) \,;
\end{aligned}
$$

da ciò ricaviamo che $\mathrm{Vol}(E) = \frac{2\pi}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Esercizio 95. Innanzitutto cerchiamo di capire com'è fatto il nostro dominio E. I punti in E devono soddisfare due condizioni:

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$: cioè devono stare internamente alla sfera di centro l'origine e raggio 1;
- $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$: si deve quindi avere $z \geq 0$ (e quindi stiamo considerando solamente i punti nell'*emisfero* superiore), ed inoltre affinché sia soddisfatta la seconda condizione tali punti dovranno essere esterni al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (è un cono circolare retto, con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse z).

Rappresentiamo tale dominio in coordinate sferiche $(\rho, \varphi_\epsilon, \theta)$. Ricordiamo che le coordinate sferiche sono così definite: se $P = (x, y, z)$ è un punto diverso dall'origine, avremo:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi_\epsilon \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi_\epsilon \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi_\epsilon \,, \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con

- ρ la distanza di P dall'origine (cioè il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$);
- φ_ϵ l'angolo che l'asse individuato dal vettore $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse delle z; quindi φ_ϵ assumerà valori compresi tra 0 e π (osserviamo che in un certo senso rappresenta una sorta di *latitudine* geografica);
- θ l'angolo che la proiezione del vettore $\overrightarrow{OP}$ sul piano xy, forma con l'asse delle x; quindi θ assumerà valori compresi tra 0 e 2π (osserviamo che rappresenta proprio la *longitudine* geografica).

Traduciamo le condizioni che identificano il nostro dominio, nelle nuove coordinate:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad &\iff \quad 0 < \rho \leq 1 \\ z \geq 0 \quad &\iff \quad 0 \leq \varphi_\epsilon \leq \frac{\pi}{2} \\ z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad &\iff \quad \cos\varphi_\epsilon \leq \sqrt{\sin^2\varphi_\epsilon} = |\sin\varphi_\epsilon| = \sin\varphi_\epsilon \quad (0 \leq \varphi_\epsilon \leq \frac{\pi}{2}) \\ &\iff \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi_\epsilon \leq \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Quindi (in tale coordinate) il nostro dominio diventerà:

$$E \quad = \quad \left\{ (r, \varphi_\epsilon, \theta) : \ 0 < \rho \leq 1, \ \frac{\pi}{4} \leq \varphi_\epsilon \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Cerchiamo ora di rispondere ai vari quesiti proposti.

1. Cominciamo con l'osservare che la superficie ∂E può essere vista come unione di tre superfici regolari date rispettivamente dalla base della semisfera (che indicheremo con ∂E_1), dalla porzione di superficie sferica (che indicheremo con ∂E_2) e dalla superficie *interna* del cono (che indicheremo con ∂E_3).
   Calcoliamo separatamente l'area di ciascuna di queste componenti.

   ∂E_1: tale superficie è un cerchio di raggio 1 e centro l'origine, contenuto nel piano xy; quindi la sua area è nota (cioè π). Volendo procedere *pedantemente*, dovremmo trovare una parametrizzazione di tale superficie e calcolare il relativo integrale di superficie, ottenendo lo stesso risultato. Infatti, una parametrizzazione per ∂E_1 è data da:

$$\Psi^1(u,v) \quad = \quad \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = 0 \end{cases}$$

con $0 < u < 1$ e $0 < v < 2\pi$; inoltre:

$$\begin{aligned} \Psi^1_u \wedge \Psi^1_v &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0,0,u)\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}\,(\partial E_1) &= \int_{\partial E_1} d\sigma = \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \left\|\Psi^1_u \wedge \Psi^1_v\right\| dv = \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} u\, dv = \\ &= 2\pi \int_0^1 u\, du = \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

∂E_2: tale superficie è la porzione di calotta sferica (di raggio 1 e centro l'origine), avente $\frac{\pi}{4} \leq \varphi_\epsilon \leq \frac{\pi}{2}$. Una parametrizzazione per ∂E_2 è data da:

$$\Psi^2(u,v) \quad = \quad \begin{cases} x = \sin u\cos v \\ y = \sin u\sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

con $\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{2}$ e $0 < v < 2\pi$; inoltre:

$$\begin{aligned} \Psi^2_u \wedge \Psi^2_v &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos u\cos v & \cos u\sin v & -\sin u \\ -\sin u\sin v & \sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\sin^2 u\cos v,\, \sin^2 u\sin v,\, \sin u\cos u)\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\partial E_2) &= \int_{\partial E_2} d\sigma = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \left\| \Psi_u^2 \wedge \Psi_v^2 \right\| \, dv = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^4 u + \sin^2 u \cos^2 u}\, dv = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 u \sin^2 u + \sin^2 u \cos^2 u}\, dv = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 u}\, dv = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} |\sin u|\, dv = \\
&= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|\, du = \\
&= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = \\
&= 2\pi \left[-\cos u\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \sqrt{2}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

∂E_3: tale superficie è la superficie *interna* del cono. Troviamo il raggio di base e l'altezza di tale cono (questi saranno ovviamente uguali):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

quindi l'altezza del cono e il raggio di base sono $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Una parametrizzazione per ∂E_3 sarà data da:

$$\Psi^3(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

con $0 < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $0 < v < 2\pi$; inoltre:

$$\begin{aligned}
\Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3 &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-u \cos v,\ -u \sin v,\ u)\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\partial E_3) &= \int_{\partial E_3} d\sigma = \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} du \int_0^{2\pi} \left\| \Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3 \right\| \, dv = \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} \, dv = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, u \, dv = \\
&= 2\sqrt{2}\,\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u \, du = \\
&= \sqrt{2}\,\pi \, \left[u^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\
&= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

In conclusione l'area totale di ∂E è:

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\partial E) &= \text{Area}\,(\partial E_1) + \text{Area}\,(\partial E_2) + \text{Area}\,(\partial E_3) = \\
&= \pi + \sqrt{2}\,\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora il flusso esterno del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ (è diretto radialmente) attraverso la superficie ∂E (che indicheremo con $\Phi_F^+(\partial E)$). Per la linearità dell'operatore ***flusso*** si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi_F^+(\partial E) &= \Phi_F^+(\partial E_1 \cup \partial E_2 \cup \partial E_3) = \\
&= \Phi_F^+(\partial E_1) + \Phi_F^+(\partial E_2) + \Phi_F^+(\partial E_3)\,;
\end{aligned}$$

calcoliamo quindi separatamente i vari flussi.
(Nota: continueremo ad usare le stesse notazioni e parametrizzazioni introdotte nel punto precedente.)

$\Phi_F^+(\partial E_1)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:[7]

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_u^1 \wedge \Psi_v^1}{\|\Psi_u^1 \wedge \Psi_v^1\|} &= \frac{1}{u}(0,0,u) = \\ &= (0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Tale versore non è diretto esternamente alla superficie (ma internamente, come si verifica facilmente), di conseguenza dovremmo considerare il versone opposto $\hat{n}_1 = (0,0,-1)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_F^+(\partial E_1) &= \int_{\partial E_1} F \cdot \hat{n}_1 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_1} (x,y,z) \cdot (0,0,-1)\, d\sigma = \\ &= -\int_{\partial E_1} z \, d\sigma = \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

in quanto la z è identicamente nulla su ∂E_1.

$\Phi_F^+(\partial E_2)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_u^2 \wedge \Psi_v^2}{\|\Psi_u^2 \wedge \Psi_v^2\|} &= \frac{1}{\sin u}(\sin^2 u \cos v,\, \sin^2 u \sin v,\, \sin u \cos u) = \\ &= (\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u)\,, \end{aligned}$$

che è proprio diretto nella direzione radiale (in quanto in una sfera in raggio è normale alla superficie). Tale versore è esterno alla superficie (basta verificarlo in un singolo punto), di conseguenza considereremo il versone normale

$$\hat{n}_2 = (\sin u \cos v,\, \sin u \sin v,\, \cos u) = (x,y,z)\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_F^+(\partial E_2) &= \int_{\partial E_2} F \cdot \hat{n}_2 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} (x,y,z) \cdot (x,y,z)\, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} x^2 + y^2 + x^2 \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} 1 \, d\sigma = \\ &= \mathrm{Area}\,(\partial E_2) = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\,. \end{aligned}$$

[7] Tale risultato si poteva ottenere anche osservando che la superficie ∂E_1 è interamente contenuta nel piano xy e di conseguenza la sua direzione normale è individuata dall'asse z.

$\Phi_F^+(\partial E_3)$: Osserviamo che un versore normale alla superficie è dato da:

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3}{\|\Psi_u^3 \wedge \Psi_v^3\|} &= \frac{1}{u}\,(-u\cos v,\, -u\sin v,\, u) = \\ &= (-\cos v,\, -\sin v,\, 1)\,.\end{aligned}$$

Tale versore è diretto esternamente alla superficie (come si verifica facilmente), di conseguenza considereremo il versone

$$\hat{n}_3 = (-\cos v,\, -\sin v,\, 1)\,.$$

Osserviamo inoltre che tale direzione è normale alla direzione radiale; infatti in un generico punto di ∂E_3 si ha:

$$\begin{aligned}F(x,y,z)\cdot\hat{n}_3 &= (u\cos v,\, u\sin v,\, u)\cdot(-\cos v,\, -\sin v,\, 1) = \\ &= -u\cos^2 v - u\sin^2 v + u = \\ &= -u + u = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

A tale conclusione si poteva giungere anche attraverso semplici considerazioni geometriche: la superficie del cono è in ogni punto tangente alla direzione radiale (in quanto ottenuto dalla rotazione di una retta passante per l'origine), quindi il vettore normale in ogni punto dovrà essere ortogonale al raggio e di conseguenza al campo vettoriale $F(x,y,z)$.
Questi fatti ci permettono di concludere che il flusso di F attraverso la superficie ∂E_3 è nullo:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E_3) &= \int_{\partial E_3} F\cdot\hat{n}_3\,d\sigma = \\ &= \int_{\partial E_2} 0\,d\sigma = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Concludendo, il flusso totale sarà:

$$\begin{aligned}\Phi_F^+(\partial E) &= \Phi_F^+(\partial E_1\cup\partial E_2\cup\partial E_3) = \\ &= \Phi_F^+(\partial E_1)+\Phi_F^+(\partial E_2)+\Phi_F^+(\partial E_3) = \\ &= 0+\sqrt{2}\,\pi+0 = \\ &= \sqrt{2}\,\pi\,.\end{aligned}$$

3. Per calcolare il volume di E, applichiamo il teorema della divergenza con

il campo vettorial F sopra introdotto:

$$\begin{aligned}
\Phi_F^+(\partial E) &= \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \\
&= \iiint_E \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \\
&= \iiint_E 3\, dx\, dy\, dz = \\
&= 3\,\mathrm{Vol}\,(E)\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathrm{Vol}\,(E) = \frac{1}{3}\Phi_F^+(\partial E) = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\,.$$

Esercizio 96. Consideriamo la 1-forma differenziale

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= A(x,y)\, dx \ + \ B(x,y)\, dy \ \equiv \\
&\equiv \frac{(y^3 - x^2 y)\, dx \ + \ (x^3 - y^2 x)\, dy}{(x^2+y^2)^2}\,,
\end{aligned}$$

che è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Osserviamo che non può essere estesa ad una 1-forma differenziale definita su tutto $\mathbb{R}^2$; infatti, basta considerare ad esempio che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} A\left(0, \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\,,\right]_{\substack{x=0\\ y=\frac{1}{n}}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^3} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} n = \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Analizziamo ora i quesiti proposti.

1. Dimostriamo che ω è chiusa. Dobbiamo far vedere che:

$$\partial_y\, A(x,y) = \partial_x\, B(x,y)\,.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\partial_y A(x,y) &= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2-(y^3-x^2y)\,2(x^2+y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^4} = \\
&= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)\,4y}{(x^2+y^2)^3} = \\
&= \frac{6x^2y^2-x^4-y^4}{(x^2+y^2)^3} \\
\partial_x B(x,y) &= \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)^2-(x^3-y^2x)\,2(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^4} = \\
&= \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)\,4x}{(x^2+y^2)^3} = \\
&= \frac{6x^2y^2-x^4-y^4}{(x^2+y^2)^3}\,.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che ω è chiuso. Questo non ci permette di dire che ω è esatta, in quanto tale 1-forma è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che non è un dominio semplicemente connesso (e quindi non vale l'equivalenza tra *esattezza* e *chiusura*).

2. Per $\alpha > 0$ fissato, consideriamo la curva γ_α; una sua parametrizzazione è data da:

$$\Phi_\alpha(\theta) = \begin{cases} x = \alpha\,\cos\theta \\ y = \alpha\,\sin\theta\,, \end{cases}$$

con $0 \leq \alpha < 2\pi$. Calcoliamo l'integrale richiesto:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha^3 \sin^3\theta - \alpha^3\cos^2\theta\sin\theta)}{\alpha^4}\, d(\alpha\cos\theta) + \\
&\quad + \frac{(\alpha^3\cos^3\theta - \alpha^3\sin^2\theta\cos\theta)}{\alpha^4}\, d(\alpha\sin\theta) = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\alpha^3 \sin^3\theta - \alpha^3\cos^2\theta\sin\theta)}{\alpha^4} (-\alpha\sin\theta) \right. + \\
&\quad + \left. \frac{(\alpha^3\cos^3\theta - \alpha^3\sin^2\theta\cos\theta)}{\alpha^4} (\alpha\cos\theta) \right] d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^4\theta - \sin^4\theta)\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\theta)\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta - \sin^2\theta]\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = \\
&= \frac{1}{2}\, [\sin 2\theta]_0^{2\pi} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

3. Consideriamo una generica curva γ chiusa e semplice, che compia un giro intorno all'origine. Per il teorema di Jordan, tale curva individuerà una regione interna ed una esterna; indichiamo con R tale regione interna (aperta). Ovviamente (per le ipotesi assunte su γ) $0 \in R$; quindi esisterà una *palla* di raggio α (sufficientemente piccolo) e centro l'origine, la cui chiusura è contenuta interamente in R (cioè $\overline{B_\alpha(0)} \subset R$). Consideriamo ora la regione
$$\Delta = R \setminus \overline{B_\alpha(0)} \;\subset\; \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,,$$
la cui frontiera è costituita da due componenti connesse:
$$\partial\Delta = \gamma \cup \partial B_\alpha(0) = \gamma \cup \gamma_\alpha\,.$$
Dal teorema di Stokes sappiamo che
$$\int_{\partial\Delta} \omega = \int_\Delta [\partial_y A(x,y) - \partial_x B(x,y)]\, dx\, dy\,;$$

calcolando separatamente i due integrali, ed utilizzando il fatto che ω è chiusa, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} [\partial_y A(x,y) - \partial_x B(x,y)]\, dx\, dy &= \int_{\Delta} 0\, dx\, dy = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\int_{+\partial\Delta} \omega \quad = \quad \int_{+\gamma} \omega - \int_{+\gamma_\alpha} \omega\,.$$

Quindi, usando il teorema di Stokes (Teorema di Gauss-Green nel piano) e applicando il punto precedente possiamo concludere che:

$$\int_{+\gamma} \omega = \int_{+\gamma_\alpha} \omega = 0\,.$$

4. Ricordiamo che l'*esattezza* è equivalente alle seguenti condizioni:

   (a) Per ogni curva chiusa γ (contenuta nel dominio di definizione) si ha che $\int_\gamma \omega = 0$;

   (b) Se γ_1 e γ_2 sono due curve (contenute entrambe nel dominio di definizione) con gli stessi estremi e la stessa orientazione, allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

   Mostriamo l'esattezza utilizzando la prima caratterizzazione (anziché trovare direttamente la primitiva che è piuttosto laborioso). Dobbiamo quindi mostrare che per ogni curva chiusa γ si ha che $\int_\gamma \omega = 0$. Dal punto precedente sappiamo che questo è vero per le curve chiuse semplici, che compiono un giro intorno all'origine; di conseguenza tale risultato si può estendere facilmente anche alle curve chiuse non semplici che compiono un giro intorno all'origine: basterà "spezzare" il cammino in più cammini semplici e applicare il risultato precedente (utilizzando la linearità (rispetto al cammino) dell'operazione d'integrazione di 1-forme.
   Cosa si può dire dei cammini che non girano intorno all'origine? Per tali cammini le cose sono molto più semplici. Infatti, questi possono essere visti come contenuti in un sottodominio semplicemente connesso[8] di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: su tale sottodominio vale l'equivalenza tra *chiusura* ed *esattezza*, quindi la nostra ω è, su tale sottodominio, una 1-forma esatta (poiché è chiusa), e quindi il suo integrale su ogni cammino chiuso sarà nullo.

[8] Graficamente questo fatto risulta abbastanza evidente; un po' meno immediata è la dimostrazione formale. Ad esempio si può ragionare nel seguente modo: poiché la curva γ è chiusa, per il teorema di Jordan dividerà $\mathbb{R}^2$ in due regioni connesse di cui una esterna (illimitata) e una interna (limitata); inoltre poiché la curva non gira intorno all'origine, fa sì che l'origine sia contenuta nella regione esterna illimitata. Consideriamo quindi una curva semplice Γ che collega 0 all' ∞: basterà prendere come sottodominio semplicemente connesso, la regione $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$; infatti questa è semplicemente connessa e contiene γ al suo interno.

Possiamo quindi concludere che ω è una 1-forma esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Cerchiamo di trovarne una primitiva, cioè una funzione $f(x,y)$ tale che $\omega = df$; in altre parole si dovrà avere:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = A(x,y) = \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ f_y(x,y) = B(x,y) = \dfrac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2}\,. \end{cases}$$

Queste equazioni non sembrano di facile integrazione, ma la loro natura ci suggerisce di studiare il problema in altre coordinate: le coordinate polari. Supponiamo di conoscere una primitiva $f(x,y)$ e definiamo la nuova funzione

$$g(\rho,\theta) \equiv f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,,$$

ottenuta esprimendo la f in coordinate polari. Vediamo quali equazioni soddisfa la g (utilizzando la regola di differenziazione di funzioni composte):

$$\begin{aligned}
g_\rho &\equiv f_x(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\sin\theta = \\
&= \frac{r^3\sin^3\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4}\,\cos\theta + \\
&\quad + \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^4}\,\sin\theta = \\
&= \frac{\sin^3\theta\cos\theta - \cos^3\theta\sin\theta \,+\, \sin\theta\cos^3\theta - \sin^3\theta\cos\theta}{r} = \\
&= 0 \\
g_\theta &\equiv f_x(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,(-\rho\sin\theta) + f_y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,(\rho\cos\theta) = \\
&= \frac{r^3\sin^3\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4}\,(-\rho\sin\theta) + \\
&\quad + \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^4}\,(\rho\cos\theta) = \\
&= (\sin^3\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\,(-\sin\theta) + (\cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta)\,(\cos\theta) = \\
&= -\sin^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = \\
&= \cos^4\theta - \sin^4\theta = \\
&= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \\
&= \cos 2\theta\,.
\end{aligned}$$

Queste equazioni sono sicuramente più semplici da integrare. La prima ci dice che la g non dipende da ρ. Integrando la seconda otteniamo:

$$g(\rho,\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}\,.$$

Dobbiamo ora ricavare la f, cioè vogliamo riscrivere questa funzione in coordinate cartesiane. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} g(\rho,\theta) &= \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} = \\ &= \sin\theta\cos\theta = \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \\ &= \frac{(r\sin\theta)\,(r\cos\theta)}{r^2}\,; \end{aligned}$$

quindi otteniamo:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,.$$

Si verifica immediatamente che questa è effettivamente una primitiva per la ω.

2.4 Serie di Fourier e applicazioni

Esercizio 97. Calcolando i coefficienti di fourier, si ha che:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})dx = 0 \\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})e^{-inx}dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)\,. \end{cases}$$

La funzione f è C^1 a tratti su $\mathbb{R}$, pertanto la sua serie di Fourier converge ad f dappertutto. La convergenza è totale (e quindi uniforme) in quanto la serie $\sum_{n\neq 0}\frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} < \infty$.

Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\neq 0} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}e^{inx} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}\cos{(2n+1)x}\,. \end{aligned}$$

(Osserviamo che infatti la funzione f è pari, come si deduce dal fatto che nella sua serie di Fourier compaiano soltanto i termini relativi al coseno!)

Calcoliamo ora la somma delle serie in questione:

- Da quanto detto sopra relativamente alla convergenza della serie di Fourier alla funzione f, si ha che:

$$1 = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,;$$

- $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}= \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

  da cui segue che: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;

- $$\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{2|x|}{\pi})^2dx=\frac{1}{3}$$

  mentre

  $$\sum_n |c_n|^2=\sum_{n\geq 0}\frac{32}{\pi^4(2n+1)^4}\ ;$$

  quindi, usando Parseval:

  $$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\ .$$

- $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}= \\ &= \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{\pi^4}{96}\end{aligned}$$

  da cui segue che: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Esercizio 98. 1. Le due condizioni omogenee $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, ci suggeriscono di cercare una soluzione della forma

$$u(x,t)=\sum_{n\geq 1}c_n(t)\sin nx\ .$$

Dobbiamo ricavarci esplicitamente i c_n; vediamo quali sono le condizioni da imporre (detta $f(x)=x$ estesa in maniera dispari su $[-\pi,\pi]$, indichiamo con $\hat{f}_n$ i suoi coefficienti di Fourier rispetto alla base $\{\sin nx\}_n$... li calcoleremo in seguito):

$$u_t-u_{xx}=0 \iff c_n'(t)+n^2c_n(t)=0 \qquad \forall\, n\geq 1$$

quindi i $c_n(t)$ sono della forma $c_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ e di conseguenza la nostra soluzione sarà rappresentata da:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

per cui la nostra attenzione si sposterà nella determinazione di questi A_n in modo da soddisfare le condizioni iniziali:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx \quad \Longleftrightarrow \quad A_n = \hat{f}_n \ .$$

Quindi la soluzione cercata è data da:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n e^{-n^2 t} \sin nx \ .$$

Per completare il tutto bisogna calcolare gli $\hat{f}_n$:

$$\hat{f}_n \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \ .$$

Sostituendo nell'espressione della soluzione otteniamo:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin nx \ .$$

Osserviamo che potevamo procedere in un altro modo (del tutto equivalente a quello fin qui esposto), noto come metodo di separazione delle variabili. Quello che faremo è cercare una soluzione dalla forma particolare in cui le variabili x è t compaiono come argomento di funzioni distinte; richiederemo cioè:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

che andremo a sostituire nelle equazioni che costituiscono il problema, ottenendo:

$$\begin{aligned} & X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned}$$

quindi devono essere necessariamente uguali ad una costante $-\mu$ (questo perchè sto richiedendo in ogni punto che queste due funzioni siano uguali : ma dipendono da variabili indipendenti e quindi non possono che essere costanti):

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\mu \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \ . \end{cases}$$

Cominciamo col risolvere la seconda equazione, con i relativi dati iniziali che si deducono da quelli del problema originale:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \\ X(0) = X(\pi) = 0 \ ; \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che per $\mu = 0$ oppure $\mu < 0$ l'unica soluzione ammissibile è la soluzione nulla, che però non è compatibile con il problema iniziale. Quindi l'unico caso ammissibile è $\mu > 0$; in tal caso la soluzione è data da:

$$X_\mu(x) = A_\mu \cos\sqrt{\mu}x + B_\mu \sin\sqrt{\mu}x$$

e imponendo i dati iniziali si ottiene:

$$\begin{aligned} &X_\mu(0) = 0 \implies A_\mu = 0 \\ &X_\mu(\pi) = 0 \implies B_\mu \sin\sqrt{\mu}\pi = 0 \implies \sqrt{\mu} = n \implies \mu = n^2 \ . \end{aligned}$$

Sostituendo il valore di μ trovato otteniamo che la prima equazione differenziale invece ammette come soluzione:

$$T_n(t) = A_n e^{-n^2 t} \ .$$

Quindi prendo la soluzione u come combinazioni lineari di queste soluzioni $X_n T_n$ al variare di n, ottenendo:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} C_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

e procedo esattamente come visto con il metodo precedente, giungendo alla stessa soluzione!

2. Si può procedere in vari modi:

   - Primo metodo: Usando il principio di Sovrapposizione lineare [9] , segue immediatamente che il problema dato è equivalente a risolvere

[9] Infatti usando la linearità dell'operatore Δ, segue che se $u_1, \ldots, u_n$ sono soluzioni di $\Delta u = 0$, allora anche $v = u_1 + \ldots u_n$ è una soluzione dello stesso problema; aggiustando opportunamente le condizioni al contorno, si ha quanto segue nell'esercizio.

singolarmente i seguenti tre problemi:

$$a)\begin{cases}\Delta u_1 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_1(x,0) = x^2 & 0 \le x \le \pi \\ u_1(x,\pi) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_1(0,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \\ u_1(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

$$b)\begin{cases}\Delta u_2 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_2(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_2(x,\pi) = x^2 & 0 \le x \le \pi \\ u_2(0,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \\ u_2(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

$$c)\begin{cases}\Delta u_3 = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u_3(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_3(x,\pi) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_3(0,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \\ u_3(\pi,y) = \pi^2 & 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

Tali problemi si possono risolvere facilmente (a meno di difficoltà dovute ai conti!) esattamente come abbiamo fatto per il primo problema.

- Secondo metodo: Vogliamo ricondurci al caso di due condizioni di Dirichlet omogenee; cerchiamo una soluzione della forma $u = \pi x - v$; cerchiamo di trascrivere il problema in termini della v anzichè della u (osserviamo che avendo scelto oculatamente il termine πx, si ha una semplificazione del problema!).

  Osservando che $\Delta u = -\Delta v$ e che $v = \pi x - u$ si ha che il problema iniziale diventa:

$$\begin{cases}\Delta v = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ v(x,0) = x(\pi - x) & 0 \le x \le \pi \\ v(x,\pi) = x(\pi - x) & 0 \le x \le \pi \\ v(0,y) = 0 & 0 \le y \le \pi \\ v(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le \pi\ . \end{cases}$$

  Le due condizioni omogenee $v(0,y) = v(\pi,y) = 0$, ci suggeriscono di cercare una soluzione della forma

$$v(x,y) = \sum_{n\ge1} c_n(y) \sin nx\ .$$

  Dobbiamo ricavarci esplicitamente i c_n; vediamo quali sono le condizioni da imporre (detta $f(x) = x(\pi - x)$ estesa in maniera dispari su $[-\pi,\pi]$, indichiamo con $\hat{f}_n$ i suoi coefficienti di Fourier rispetto alla base $\{\sin nx\}_n$... li calcoleremo in seguito):

$$\begin{array}{lcll}
\Delta v = 0 & \Longleftrightarrow & c_n''(y) - n^2 c_n(y) = 0 & \forall\, n \geq 1 \\
v(x,0) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx & \Longleftrightarrow & c_n(0) = \hat{f}_n & \\
v(x,\pi) = f(x) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \sin nx & \Longleftrightarrow & c_n(\pi) = \hat{f}_n &
\end{array}$$

quindi ci siamo ricondotti a studiare la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} c_n''(y) - n^2 c_n(y) = 0 \qquad \forall\, n \geq 1 \\ c_n(0) = \hat{f}_n \\ c_n(\pi) = \hat{f}_n \end{cases}$$

che ammette come soluzione:

$$c_n(y) = a_n \sinh ny + b_n \cosh ny \; ;$$

sostituendo le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{l} b_n = \hat{f}_n \\ a_n \sinh n\pi + b_n \cosh n\pi = \hat{f}_n \end{array}$$

e quindi:

$$\begin{array}{l} b_n = \hat{f}_n \\ a_n = \hat{f}_n \dfrac{1 - \cosh n\pi}{\sinh n\pi} \; . \end{array}$$

Quindi la soluzione cercata è data da:

$$u(x,y) = \pi x - \sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \left(\frac{1 - \cosh n\pi}{\sinh n\pi} \sinh ny + \cosh ny\right) \sin nx$$

Per completare il tutto bisogna calcolare gli $\hat{f}_n$:

$$\hat{f}_n \quad = \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n) \; .$$

Quindi i coefficienti sono dati da:

$$\begin{cases} \hat{f}_{2n} = 0 \\ \hat{f}_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \end{cases}$$

e la soluzione del problema può essere rappresentata nella forma:

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad &= \quad \pi x - \sum_{n\geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \left(\frac{1 - \cosh(2n+1)\pi}{\sinh(2n+1)\pi} \sinh(2n+1)y + \right. \\ &+ \quad \left. \cosh(2n+1)y \right) \sin(2n+1)x \; . \end{aligned}$$

Capitolo 3

Analisi complessa

Esercizio 99. 1. Ossserviamo che :

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-i)^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j(1+(-1)^j) = 2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j} i^{2j} = \\ &= 2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j.\end{aligned}$$

Quindi $\gamma=(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$, e quindi $\operatorname{Im}\gamma=0$.

2. Da quanto detto sopra segue che:

$$\operatorname{Re}\{(1+i)^n+(1-i)^n\}=2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j.$$

3.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i\log i}=\{e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}: \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}: \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (-1)^{2i} &= e^{2i\log(-1)}=\{e^{-2(\pi+2\pi n)}: \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-2(2n+1)\pi}: \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $(-1)^{2i}\subset((-1)^2)^i$.

5.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{i} &= \{e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}, \quad k=0,1,2,3\} = \\ &= \{e^{i\frac{\pi}{8}},\ e^{i\frac{5\pi}{8}},\ e^{i\frac{9\pi}{8}},\ e^{i\frac{13\pi}{8}}\}.\end{aligned}$$

Esercizio 100. Soluzione:

1. - $\inf |\sin z| = 0$: ovvio!
   - $\sup |\sin z| = +\infty$: infatti $|\sin(in)| = |\sinh(-n)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$;
2. - $\inf_D |\sin z| = 0$: ovvio!
   - $\sup_D |\sin z| = \cosh R$: infatti basta osservare che

     $$|\sin(x+iy)| = \cosh^2 y - \sinh^2 x$$

     e si vede che il sup viene assunto per $z \to \frac{\pi}{2} + iR$.
3. - $\inf_D \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 0$: ovvio prendo $z = i$!
   - $\sup_D \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$: infatti si dimostra che questa funzione mappa tale semipiano nel cerchio unitario $\{|z| < 1\}$.
4. Per quanto detto nel punto precedente, si ha che :
   - $\inf_D |e^{\frac{z-i}{z+i}}| = e^{-1}$
   - $\sup_D |e^{\frac{z-i}{z+i}}| = e$.

Esercizio 101. 1. E' sufficiente dimostrare che f analitica in $\Omega \Longrightarrow \overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$ è analitica in $\overline{\Omega}$. Infatti, una volta dimostrato ciò, l'altra implicazione segue immediatamente osservando che $\overline{\overline{f}} = f$. Dimostriamo quindi che $\overline{f}$ è analitica in $z_0 \in \overline{\Omega}$;

$$\lim_{w\to 0} \frac{\overline{f}(z_0+w) - \overline{f}(z_0)}{w} = \tag{3.1}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z_0+w})} - \overline{f(\overline{z}_0)}}{w} = \tag{3.2}$$

$$= \overline{\lim_{w\to 0} \frac{f(\overline{z_0}+\overline{w}) - f(\overline{z}_0)}{\overline{w}}} = \tag{3.3}$$

$$= \overline{f'(\overline{z}_0)} \tag{3.4}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che f è analitica in $\overline{z}_0$.

2. Supponiamo che $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia una funzione analitica in Ω, tale che $|f|^2 = u^2 + v^2 \equiv C$. Quindi derivando l'espressione sopra, otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_x(u^2+v^2) = 0 \\ \partial_y(u^2+v^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}$$

Applicando le equazioni di Cauchy Riemann, e sostituendo sopra, otteniamo:

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ uu_y + vu_x = 0 \end{cases}$$

da cui, moltiplicando le due espressioni otteniamo:

$$(u^2+v^2)(u_x^2+u_y^2) = C(u_x^2+u_y^2) = 0.$$

Distinguiamo ora due casi:

(a) Se $C = 0$, allora $f(z) \equiv 0$ e quindi è costante!

(b) Se $C \neq 0$, allora $u_x^2 + u_y^2 = 0$ e quindi $u_x = u_y = 0$ da cui segue che u è costante; d'altra parte utilizzando le equazioni di C.R. otteniamo che $v_x = v_y = 0$ e cioè anche v è costante.

3. Se $\operatorname{Re} f = f$, allora $v(x,y) \equiv 0$ e quindi $v_x = v_y = 0$; applicando Cauchy Riemann si ha che anche $u_x = u_y = 0$ e quindi anche u è costante.

4. Si procede in maniera speculare a quanto fatto sopra.

Esercizio 102. Imponendo la condizione $\Delta P(x,y) = 0$, si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} c = -3a \\ b = -3d \end{cases}$$

e quindi P è della forma:

$$P(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 \ .$$

Risolviamo ora il secondo problema; dalle equazioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$\begin{cases} v_y = P_x \\ v_x = -P_y \end{cases}$$

e tramite integrazione diretta si ottiene:

$$v(x,y) = dx^3 + 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + cost.$$

Quindi la funzione analitica corrispondente è:

$$f(z) = f(x+iy) = (a+id)z^3 + i\, cost.$$

Esercizio 103. 1.

$$\begin{aligned}
\frac{2z+3}{z+1} &= \frac{2(z-1)+5}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\frac{2(z-1)+5}{1+\frac{z-1}{2}} = \\
&= ((z-1)+\frac{5}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \ldots = \\
&= \frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n \ ;
\end{aligned}$$

2. Utilizzeremo i teoremi di differenziazione per Serie, applicati alla serie geometrica (si verifica facilmente che sono soddisfatte tutte le hp); cominciamo con l'osservare il seguente risultato elementare:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \qquad \text{per } |z|<1 \ .$$

Quindi, differenziando $(m-1)$ volte, otteniamo (per $|z|<1$):

$$\begin{aligned}
D^{m-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{(m-1)!}{(z-1)^m} \\
D^{m-1}\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) &= \sum_{n\geq m-1} z^{n-(m-1)}n(n-1)\ldots(n-(m-2)) \ .
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le due uguaglianze, otteniamo:

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n\geq 0} z^n \left(\begin{array}{c} n+m-1 \\ m-1 \end{array}\right) \ .$$

Esercizio 104. I Raggi di convergenza delle serie assegnate sono:

1. $R=\infty$;
2. $R=0$;
3. $R=1$;
4. $R=1$;
5. $R=1$.

Esercizio 105. 1. E' una serie di potenza, il cui disco di convergenza è dato da:

$$\Delta = \{|z+i| < \sqrt{2}\};$$

In tale disco converge alla funzione $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2. La serie converge totalmente (e quindi uniformemente e puntualmente) per $|z| \leq 1$. La serie non converge per $|z| > 1$ (non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy).

3. La serie converge totalmente (e quindi uniformemente e puntualmente) per $|z| \leq 1$. La serie non converge per $|z| > 1$ (non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy).

Esercizio 106. Dalla definizione di Raggio di convergenza, si verifica quasi immediatamente che:

- La prima serie ha raggio di convergenza R^2 (dove se $R = \infty$, si ha che $R^2 = \infty$);
- La seconda serie ha raggio di convergenza $\sqrt{R}$;
- La terza serie (mettendo insieme i due risultati precedenti), ha raggio di convergenza R.

Esercizio 107. 1. $\int_{\sigma(0,1+i)} x\, dz \;=\; \frac{1+i}{2}$.

2. $\int_{|z|=R} x\, dz \;=\; i\pi R^2$.

3. Osserviamo che:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} + \int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1}\right) \;;$$

   applicando la formula di Cauchy su dischi, segue immediatamente che tale integrale è nullo.

4.
   - Se $n \leq 0$, tale integrale è uguale a zero, come segue immediatamente dal teorema di Cauchy su dischi;
   - Se $n > 0$: applichiamo la formula di Cauchy su dishi; derivando $(n-1)$ volte entrambi i membri, otteniamo:

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta\,,$$

     che applicato al nostro integrale ci fornisce:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\ .$$

5. Si procede esattamente come in (3) e segue che $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.

6. Si Procede analogamente a (3) e (5), usando un trucco analogo a quello suggerito nell'integrale (2); otteniamo che:

$$\frac{1}{|z-a|^2} = \frac{1}{\rho^2 - |a|^2}\left(\frac{a}{z-a} + \frac{\rho^2}{\rho^2 - \overline{a}z}\right)$$

e facendo i conti troviamo:

- Se $|a| < \rho$ il risultato è : $\frac{2\pi i a}{|\rho^2 - |a|^2|}$;
- Se $|a| > \rho$ il risultato è : $\frac{2\pi i \rho^2}{\overline{a}|\rho^2 - |a|^2|}$.

7. Procedendo esattamente come in (4), otteniamo:

- Se $n \leq 0$, allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$;
- Se $n > 0$ e n pari, allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$;
- Se $n > 0$ e $n \equiv 1$ (mod.4), allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$;
- Se $n > 0$ e $n \equiv 3$ (mod.4), allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = -\frac{2\pi i}{(n-1)!}$.

8. Distinguiamo vari casi: [1]

- Se $n \geq 0$ e $m \geq 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\, dz = 0$;
- Se $n \geq 0$ e $m < 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\, dz = 2\pi i(-1)^m \binom{n}{|m|-1}$;
- Se $n < 0$ e $m \geq 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\, dz = 2\pi i(-1)^{n+1} \binom{m}{|n|-1}$;
- Se $n < 0$ e $m < 0$, allora [2]

$$\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\, dz = 2\pi i\left\{\binom{|m|+|n|-2}{|n|-1} + \binom{|m|+|n|-2}{|m|-1}\right\}$$

.

Esercizio 108. 1. Sia z tc $|z| \leq \rho$ e sia $\delta = R - \rho > 0$; per le ipotesi fatte, sappiamo che $\overline{B_\delta(z)} \subset \overline{B_R(0)}$, che è interno al dominio di analiticità della f. Come già notato nell'esercizio precedente, dalla formula di Cauchy su dischi, segue la seguente rappresentazione delle derivate della f:

$$f^n(\gamma) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

[1] E' molto probabile che ci sia qualche errore! Se ne trovate qualcuno fatemelo sapere...

[2] Suggerimento: Non fare l'integrale sulla circonferenza! usa due cammini, ottenuti unendo alla circonferenza il segmento $x = \frac{1}{2}$; questi avranno in comune tale segmento (percorso in versi opposti) e ciascuno conterrà nella propria regione interna una sola singolarità! in questo modo, a ciascuno dei due integrali ottenuti, si può applicare la Formula di Cauchy

per ogni $|\gamma - z| < \delta$. Quindi:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!M}{2\pi}\int_{\partial B_\delta(z)}\frac{1}{\delta^{n+1}} \\ &= \frac{n!M}{2\delta^{n+1}\pi}|\partial B_\delta(z)| = n!M\delta^{-n} = n!M(R-\rho)^{-n} \end{aligned}$$

e quindi

$$\sup_{B_\rho(0)} |f^{(n)}(z)| \leq n!M(R-\rho)^{-n} \; .$$

2. Se per assurdo ciò fosse vero, allora prendendo un δ sufficientemente piccolo in modo che $\overline{B_\delta(z)} \subset \Omega$ (dove con Ω intendo il dominio di analiticità della f), e applicando le stime di Cauchy precedenti, otterrei:

$$n!n^n \leq |f^{(n)}(z)| \sup_{B_\delta(z)} |f(\zeta)| n!\delta^{-n} \; ,$$

da cui:

$$\sup_{B_\delta(z)} |f(\zeta)| \geq n^n\delta^n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

che è assurdo, in quanto $|f|$ è continua su $\overline{B_\delta(z)}$ (compatto!) e quindi per il teorema di Weierstrass è ivi limitata!

Esercizio 109. Supponiamo per assurdo che esista f funzione intera (non costante), tale che Re$z \geq 0$ per ogni $z \in \mathcal{C}$; consideriamo la funzione:

$$g(z) = e^{-f(z)}.$$

E' ovvio che g sia analitica in tutto $\mathcal{C}$ (cioè è intera); inoltre $|g(z)| = e^{-\mathrm{Re} f(z)} \leq 1$ per le hp fatte! Quindi ho trovato una funzione intera non costante (in quanto f non lo era) che è limitata in modulo... questo contraddice il teorema di Liouville!

Esercizio 110.

- Considerare ad esempio la funzione $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$. (Verificate!).
- Sia f come sopra e supponiamo che esista una funzione g come nelle hp dell'esercizio; tale funzione è chiaramente analitica in $|z| \leq 1$, ma in tale insieme ha infiniti zeri, che si accumulano in almeno un punto del dominio (ho una successione in un compatto... quindi possiede almeno un punto di accumulazione!). Dalle proprietà degli zeri di una funzione olomorfa, segue che $g \equiv 0$ su $\{|z| \leq 1\}$... ma su tale insieme g coincide con f... Assurdo!

Esercizio 111. Dalla doppia periodicità della funzione f, segue che è sufficiente conoscere i valori della funzione nel dominio $R = \{a\omega_1 + b\omega_2 : \quad 0 \le a, b \le 1\}$; infatti per ogni $z \in \mathcal{C}$, me lo posso scrivere come $z = r + n\omega_1 + m\omega_2$, dove $r \in R$ (verificatelo!). Usando la doppia periodicità della f, posso concludere che $f(z) = f(r)$, da cui:

$$\sup_{\mathcal{C}} |f(z)| = \sup_{R} |f(r)| < \infty$$

in quanto R è un compatto e $|f|$ è continua (in quanto f è olomorfa), quindi dal teorema di Weierstrass segue la conclusione di sopra.
Quindi ho che f è una funzione intera e limitata in modulo: dal teorema di Liouville segue che f è costante!

Esercizio 112. Consideriamo la funzione:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & \text{se } z \neq 0 \\ \frac{f^{(m)}(0)}{m!} & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che g è una funzione olomorfa su $\{|z| < 1\}$ (Cfr. D.Sarason Note on Complex function theory , VII.13). Per $0 < r < 1$ la funzione g è limitata in modulo da $\frac{1}{r^m}$ nel disco $|z| \le r$ (segue dal principio del massimo modulo). Mandando al limite per $r \to 1^-$, otteniamo che $|g| < 1$ per $|z| < 1$, e quindi (dalla def di g):

$$|f(z)| < |z|^m$$

che è la tesi.
(Oss.: Per dimostrare che tale disuguaglianza è stretta, applicare il principio del massimo alla funzione g sopra definita...)

Esercizio 113. Dalle ipotesi dell'esercizio, sappiamo che f mappa Ω in $B_1(1) = \{|z-1| < 1\}$; in tale insiema posso definire un ramo analitico del logaritmo, che indicheremo $\log_* z$ (questo è vero in quanto tale dominio non contiene alcun cammino che gira intorno all'origine... provare a determinare esplicitamente tale ramo analitico!) Quindi:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{d}{dz}(\log_* z)\, dz = 0$$

come segue immediatamente...

Esercizio 114. 1. E' noto che una TLF viene individuata completamente dal valore che assume su tre punti distinti del piano complesso. Sia:

$$\zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

la nostra TLF che manda l'asse reale in se stesso; consideriamo ora la sua inversa, che sarà data da:

$$\zeta^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw}$$

e continuerà a mandare l'asse reale nell'asse reale!
Calcoliamo ora le due TLF in zero:

$$z(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \zeta^{-1}(0) = \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}\,.$$

Distinguiamo ora due casi (è sempre possibile ricondursi ad uno di questi due casi, moltiplicando numeratore e denominatori, per un opportuno coefficiente):

(a) Se b, $d \in \mathbb{R}$ allora anche $a \in \mathbb{R}$; quindi calcolando $\zeta(1) = \frac{a+b}{c+d} \in \mathbb{R}$ segue che anche $c \in \mathbb{R}$;

(b) Se b, $d \in i\mathbb{R}$ e di conseguenza $a \in i\mathbb{R}$. Moltiplicando numeratore e denominatore di ζ per i (tanto la TLF rimane la stessa: è definita come classe d'equivalenza) mi riconduco al caso precedente, e quindi posso concludere che anche in questo caso esiste una sua rappresentazione con coefficieni reali.

2. Ricordiamo che due TLF che coincidono su tre punti coincidono dappertutto. Premesso ciò, supponiamo che la coniugazione sia una TLF ed osserviamo che coincide con l'identità su tutto l'asse reale; poichè l'identità è una TLF allora avrei trovato due TLF che coincidono su tre punti (in realtà su molti di più) ma che sono diverse!!! (ASSURDO!)

Esercizio 115. In tutti questi esercizi, il trucco consisterà nel trovare l'immagine di due o tre punti (infatti le TLF richieste non sono uniche in molti casi) e costruirsi la TLF associata; riassumiamo brevemente le proprietà delle TLF che useremo:

- Una TLF è univocamente determinata da tre punti. (Due punti non me la determinano univocamente ma a meno di omotetie e rotazioni)
- Una TLF manda la classe (cerchi, rette) nella classe (cerchi, rette) .. ossia può mandare cerchi in cerchi, rette in cerchi, rette in rette oppure cerchi in rette; in particolare:
  - un cerchio andrà in una retta, solo se un suo punto viene mandato all'infinito;
  - una retta viene mandato in un cerchio se ogni suo punto viene mandato in un punto finito e il limite delle TLF all'infinito è finito;

- una TLF rispetta le simmetrie: punti simmetrici rispetto una retta (o un cerchio) vengono mandati in punti simmetrici rispetto l'immagine della retta (o del cerchio)... che sarà ancora una retta o un cerchio; in particolare, per simmetrico di un punto z rispetto ad un cerchio di raggio R e centro a, intendiamo un punto z^* che soddisfa la relazione $(z^* - a)(\overline{z} - \overline{a}) = R^2$. Osserviamo quindi che il simmetrico del centro è il punto all'infinito;
- una TLF conserva gli angoli (è una mappa conforme) e l'orientamento (cioè se prima percorrendo la curva avevo il dominio da un lato (destra o sinistra), l'immagine della curva sarà orientata in modo da avere l'immagine del dominio dallo stesso lato!).

Troviamo ora le trasformazioni richieste:

1. Basta imporre che:
$$z_0 \to 0 \qquad \overline{z_0} \to \infty \, ;$$
questa non me la determina univocamente: mi manda la retta reale in una circonferenza di centro 0 ma raggio a priori qualsiasi; quindi bisogna imporre che un qualsiasi punto dell'asse rele vada in un punto di modulo 1: ad esempio che il punto all'infinito vada in 1 (cioè che il limite della trasformazione sia 1; quindi otteniamo:
$$\zeta(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \, .$$

2. Mandiamo:
$$-2 \to 0 \qquad 0 \to i$$
e per concludere impongo che il punto all'infinito (è il simmetrico di 0 rispetto al primo cerchio), vada nel simmetrico di i rispetto al secondo cerchio, che è dato da (basta applicare la formuletta sopra) $\frac{-1+i}{2}$; otteniamo:
$$\zeta(z) = \frac{i+i}{2} \cdot \frac{z+2}{2z + (1-i)} \, .$$

3. Per brevità chiamiamo C_1 il cerchio più piccolo e C_2 quell'altro. Supponiamo che i due cerchi concentrici finali abbiano centro nell'origine. Sia p il punto la cui immagine è 0 (ossia il centro) Quindi il suo simmetrico rispetto a C_1 (e C_2) deve andare in ∞ (poichè c'è un solo punto che va all'infinito, questi due punti dovranno necessariamente coincidere); imponiamo quindi le seguenti condizioni per trovare p:
$$\begin{cases} (p^* - \frac{1}{4})(\overline{p} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \\ p^* \overline{p} = 1 \end{cases}$$
che ci fornisce (una volta risolto) $p = 2 + \sqrt{3}$; quindi dobbiamo imporre:
$$2 + \sqrt{3} \to 0 \qquad \frac{1}{2+\sqrt{3}} \to \infty \qquad 1 \to 1$$

dove l'ultima condizione è stata scelta arbitrariamente (se ne possono fare altre che vanno ancora benissimo!); otteniamo quindi:

$$\zeta(z) = \frac{(2+\sqrt{3}) - z}{(2+\sqrt{3})z - 1}.$$

4. Mandiamo:

$$1 \to \infty \qquad 0 \to 0 \qquad -1 \to 1$$

ed otteniamo:

$$\zeta(z) = \frac{2z}{z-1} \; .$$

Questa TLF mappa il mio dominio nella striscia $\{0 < \mathrm{Re}z < 1\}$. Quindi per mandarla nel semipiano superiore, basterà comporla con la funzion $e^{i\pi w}$, da cui otteniamo che la trasformazione cercata è:

$$f(z) = e^{i\pi\zeta(z)} = e^{\frac{2\pi i z}{z-1}} \; .$$

Esercizio 116. Osserviamo che l'asse reale viene mandato nell'asse reale (vedi es 1.1) e quindi verrà conservata la simmetria rispetto asse reale (vedi es.2). Vediamo dove viene mandato l'asse immaginario:

$$0 \to -1 \qquad i \to -i \qquad -i \to i$$

quindi viene mandato nella circonferenza unitaria di centro l'origine; in particolare, poichè 1 è l'unico punto che va all'infinito, segue che per $c \neq 1$, tutte queste retta vanno in una circonferenza.
Per $c = 1$ la retta in questione, viene mandata in se stessa; infatti: se z=1+iy allora

$$R(z) = \frac{2+iy}{iy} = 1 + \frac{2}{iy} \; .$$

Quindi, poichè le TLF conservano la simmetria, avremo che le immagini delle rette con $c = 1 + \varepsilon$ e $c = 1 - \varepsilon$ avranno immagini simmetriche rispetto l'asse $\mathrm{Re}z = 1$. Quindi è sufficiente studiare cosa succede per $c < 1$:

1. Sappiamo già che l'immagine è una circonferenza, dobbiamo determinarne il centro; per la simmetria rispetto asse reale, sappiamo che il centro deve stare su asse reale;

2. Ogni retta contiene in punto ∞ che viene mandato in 1; d'altro canto ciascuna retta ha un altro punto immagine su asse reale: $\frac{c+1}{c-1}$; quindi il centro è il punto intermedio a questi due, cioè $\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c-1} + 1\right)$.

3. Il raggio di queste circonferenze è $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c+1}{c-1}\right)$, ed osserviamo che quando $c \to \infty$ anche questo tende a zero, mentre quando $c \to 1$ questo tende a infinito (cioè tende a diventare la retta $\mathrm{Re}z = 1$).

Per simmetria si ottengono le immagini delle rette per $c > 1$. Conclusione:

1. se $c = 1$: l'immagine è la retta $\text{Rez} = 1$;
2. se $c < 1$: l'immagine è una circonferenza di centro $P_c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c+1}{c-1}\right)$ e raggio $R_c = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c+1}{c-1}\right)$;
3. se $c > 1$: l'immagine è una circonferenza di centro $P_c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c+1}{c-1}\right)$ e raggio $R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c-1} - 1\right)$.

Esercizio 117. (Premessa: molto probabilmente c'è da aggiungere qualche ipotesi sulla regolarità di f, altrimenti ci sono dei problemi... se ho tempo e le trovo, correggo questa versione provvisoria della soluzione)
Sia z_0 un punto tale che $\text{Imz}_0 > 0$; consideriamo la trasformazione che mi mappa il mio dominio nel cerchio unitario mandando z_0 nell'origine: (vedi es.2.1)

$$\zeta(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

e consideriamo la funzione $g = f \circ \zeta^{-1} : \overline{B_1(0)} \to \mathcal{C}$ e analitica su tale dominio: infatti l'unico eventuale problema è in $z = 1$, cioè nell'immagine dell'infinito.. si dimostra che per le ipotesi fatte la funzione ha in tale punto una singolarità eliminabile.
Quindi posso applicare a g la formula di Cauchy su dischi:

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{g(\xi)}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f \circ \zeta^{-1}(\xi)}{\xi}\, d\xi\ .$$

Osserviamo ora che $g(0) = f(z_0)$ e facciamo il seguente cambio di coordinate nell'integrale:

$$z = \zeta^{-1}\xi \qquad \to \qquad \xi = \zeta(z)$$

e di conseguenza:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\, dz = \frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})(z - z_0)}\ .$$

Sostituenso sopra otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})(z - z_0)}\, dz = \\ &= \frac{\text{Imz}_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+infty} \frac{f(z)}{|z - z_0|^2}\, dz\ . \end{aligned}$$

Esercizio 118. Ricordiamo che per *Residuo* di una funzione f in z_0, intendiamo il coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent con centro in z_0. (Chiaramente se f è analitica in z_0 il suo residuo in tale punto è 0)

1. Sia f una funzione meromorfa con polo in z_0 di ordine $h > 0$. Vogliamo trovare il coefficiente a_{-1} del suo sviluppo in serie di Laurent in z_0. Osserviamo che per le condizioni date, si ha che la funzione $(z - z_0)^h f(z)$ è analitica in z_0 e il coefficiente b_{h-1} del suo sviluppo di Taylor in z_0 coincide proprio con a_{-1} che stiamo cercando; quindi:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(h-1)!} D_z^{(h-1)} [(z - z_0)^h f(z)]_{|z=z_0} \ .$$

2. Se f è analitica in z_0 e g ha un polo semplice in tale punto, consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent del prodotto:

$$\begin{aligned} fg &= (a_0 + O(z)) \cdot (b_{-1}(z - z_0)^{-1} + b_0 + O(z)) = \\ &= \frac{a_0}{b_{-1}}(z - z_0)^{-1} + a_0 b_0 + a_1 b_{-1} + O(z) \ . \end{aligned}$$

Quindi ricordandoci la definizione di residuo:

$$\mathrm{Res}_{z_0} fg = a_0 b_{-1} = f(z_0) \mathrm{Res}_{z_0} g \ .$$

Esercizio 119. Soluzione:

- (a)
La funzione ha poli semplici in $z = -2, -3$; infatti:

$$\frac{1}{z^2 + 5z + 6} = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} \ .$$

Quindi $\mathrm{Res}_{-2} = 1$ e $\mathrm{Res}_{-3} = -1$.

- (b)
La funzione ha due poli di ordine 2 in $z = -1, 1$. I relativi residui sono: $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{4}$ e $\mathrm{Res}_1 = -\frac{1}{4}$.

- (c)
Questa funzione ha poli in ogni multiplo intero di π: quindi tutti e soli i poli (semplici) sono della forma $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. D'altro canto la funzione è periodica di pediodo 2π sull'asse reale, e quindi sarà sufficiente calcolare il residuo in 0 e π.
Per il residuo in 0:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}_0 = 1$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato l'esercizio 1.
Per il residuo in π:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{\sin(z - \pi)} = \frac{-(z - \pi)}{\sin(z - \pi)} \cdot \frac{1}{(z - \pi)}$$

quindi procedendo come sopra:

$$\mathrm{Res}_\pi = -1 \; .$$

Riassumendo: $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = (-1)^{\mathrm{k}}$.

- (d)
  Usando l'esercizio 1 e il punto (c), otteniamo che:

  $$\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = \cos(\mathrm{k}\pi) \cdot (-1)^{\mathrm{k}} = 1 \; .$$

- (e)
  Questa funzione ha poli in ogni multiplo intero di π e tali poli sono di ordine 2. Inoltre essendo periodica di periodo π sull'asse reale, è sufficiente calcolare il residuo in $z = 0$:

  $$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)\right)^2} = \\ &= \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4)\right)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3} + O(z^4)} = \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{3} + O(z^4)\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + O(z^2) \; . \end{aligned}$$

  Quindi $\mathrm{Res}_0 = 0$, da cui segue (per periodicità) che $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = 0$.

Esercizio 120. 1. Consideriamo la sostituzione (per |z|=1):

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \; .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \\ &= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz\ (iz)^{-1}}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \end{aligned}$$

La funzione integranda ha poli semplici in $\alpha_\pm = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, e calcolando i relativi residui, otteniamo:

$$\mathrm{Res}_{\alpha_+} = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} = -\mathrm{Res}_{\alpha_-} \; .$$

Applichiamo il teorema dei residui, ricordandoci che l'unico polo contenuto all'interno del disco unitario è α_+, quindi:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \; .$$

2. Cominciamo con l'osservare che la funzione $\sin^2 z$ assume su $(0, \frac{\pi}{2})$ gli stessi valori che assume su $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ed inoltre è periodica di periodo π sull'asse reale. Quindi possiamo riscrivere il nostro integrale (procediamo esattamente come sopra):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} &= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{dz\,(iz)^{-1}}{a+\left[\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right]^2} \\
&= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{-z\,dz}{z^4-(4a+2)z^2+1}
\end{aligned}$$

Calcoliamone i poli: sono in $\pm\sqrt{\beta_\pm}$, dove $\beta_\pm = (2a+1) \pm \sqrt{(2a+1)^2-1}$. Vediamo quali stanno all'interno del disco unitario (indichiamo le quattro soluzioni $\alpha_{++}, \alpha_{+-}, \alpha_{-+}, \alpha_{--}$):

- se $a > 0$: devo scegliere quelle associate a β_- (cioè α_{-+} e α_{--}). In questo caso otteniamo:

  $$\mathrm{Res}_{\alpha_{-+}} = \frac{\alpha_{-+}}{(\beta_- - \beta_+)(\alpha_{-+}-\alpha_{--})} \quad \text{e} \quad \mathrm{Res}_{\alpha_{--}} = \frac{\alpha_{--}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{--}-\alpha_{-+})}\,.$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\,.$$

- se $a < 0$: devo scegliere quelle associate a β_+ (cioè α_{++} e α_{+-}). In questo caso otteniamo:

  $$\mathrm{Res}_{\alpha_{++}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{++}-\alpha_{+-})} \quad \text{e} \quad \mathrm{Res}_{\alpha_{+-}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{+-}-\alpha_{++})}\,.$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{-\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\,.$$

Quindi riassumendo il valore dell'integrale viene:

$$\frac{\mathrm{sgn}(a)\,\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\,.$$

3. Intergriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\}\,.$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito. La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i\sqrt{2}$ e $z = \pm i\sqrt{3}$; naturalmente noi consi-dereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ .$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo:

$$\oint_{\gamma_R} f\,dz = \int_{C_R} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz \ = \pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ .$$

Vediamo cosa succede quando passo al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}\,dz\right| &\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{|z^4+5z^2+6|}\,|dz| \leq \\
&\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{R^4-5R^2-6}\,|dz| = \\
&= \pi R \frac{R^2}{R^4-5R^2-6} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ;
\end{aligned}$$

mentre:

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx\ .$$

Quindi:

$$\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

da cui:

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\ .$$

4. Ovviamente dobbiamo supporre $a \neq 0$ altrimenti la funzione non è integrabile in 0. Applichiamo il teorema dei residui alla funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

ed integriamola sul cammino γ_R definito come nel punto precedente. La funzione ha poli in $z = \pm i|a|$, quindi l'unico polo che si trova all'interno del nostro cammino (quando R è sufficientemente grande) è $z = i|a|$, e il suo residuo:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i|a|}} = \frac{\mathrm{e}^{-|\mathrm{a}|}}{2\mathrm{i}|\mathrm{a}|}\ .$$

Osserviamo ora i seguenti fatti:

- $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{|a|}\ .$$

- $$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz\right| &\leq \frac{1}{R^2-a^2}\int_{C_r}|e^{iz}|\,|dz| \leq \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2-a^2}\overset{R\to 0}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx \;+\; i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disparità della funzione integranda.
  Possiamo quindi concludere:

  $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2|a|}e^{-|a|}\,.$$

Esercizio 121. 1. Consideriamo la sostituzione (per $|z|=1$):

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \\ &= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz\;(iz)^{-1}}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}\end{aligned}$$

La funzione integranda ha poli semplici in $\alpha_{\pm} = -a\pm\sqrt{a^2-1}$, e calcolando i relativi residui, otteniamo:

$$\mathrm{Res}_{\alpha_+} = \frac{1}{\alpha_+-\alpha_-} = -\mathrm{Res}_{\alpha_-}\,.$$

Applichiamo il teorema dei residui, ricordandoci che l'unico polo contenuto all'interno del disco unitario è α_+, quindi:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

2. Cominciamo con l'osservare che la funzione $\sin^2 z$ assume su $(0, \frac{\pi}{2})$ gli stessi valori che assume su $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ed inoltre è periodica di periodo π sull'asse reale. Quindi possiamo riscrivere il nostro integrale (procediamo esattamente come sopra):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} &= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{dz\ (iz)^{-1}}{a+\left[\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right]^2} \\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{-z\,dz}{z^4-(4a+2)z^2+1}\end{aligned}$$

Calcoliamone i poli: sono in $\pm\sqrt{\beta_\pm}$, dove $\beta_\pm = (2a+1) \pm \sqrt{(2a+1)^2-1}$. Vediamo quali stanno all'interno del disco unitario (indichiamo le quattro soluzioni $\alpha_{++}, \alpha_{+-}, \alpha_{-+}, \alpha_{--}$):

- se $a > 0$: devo scegliere quelle associate a β_- (cioè α_{-+} e α_{--}). In questo caso otteniamo:

  $$\text{Res}_{\alpha_{-+}} = \frac{\alpha_{-+}}{(\beta_- - \beta_+)(\alpha_{-+}-\alpha_{--})} \quad \text{e} \quad \text{Res}_{\alpha_{--}} = \frac{\alpha_{--}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{--}-\alpha_{-+})}\ .$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\ .$$

- se $a < 0$: devo scegliere quelle associate a β_+ (cioè α_{++} e α_{+-}). In questo caso otteniamo:

  $$\text{Res}_{\alpha_{++}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{++}-\alpha_{+-})} \quad \text{e} \quad \text{Res}_{\alpha_{+-}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{+-}-\alpha_{++})}\ .$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{-\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\ .$$

Quindi riassumendo il valore dell'integrale viene:

$$\frac{\text{sgn}(a)\,\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\ .$$

3. Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \text{Imz} \geq 0\} \cup \{-\text{R} \leq \text{x} \leq \text{R}\}\ .$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito. La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i\sqrt{2}$ e $z = \pm i\sqrt{3}$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \; .$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo:

$$\oint_{\gamma_R} f\,dz = \int_{C_R} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz \;= \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \; .$$

Vediamo cosa succede quando passo al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}\,dz\right| \;&\leq\; \int_{C_R} \frac{R^2}{|z^4+5z^2+6|}\,|dz| \leq \\
&\leq\; \int_{C_R} \frac{R^2}{R^4-5R^2-6}\,|dz| = \\
&=\; \pi R \frac{R^2}{R^4-5R^2-6} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; ;
\end{aligned}$$

mentre:

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx \; .$$

Quindi:

$$\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \;=\; \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz \;= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

da cui:

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx \; .$$

4. Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \; .$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito. La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm 3i$ e $z = \pm 2i$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{3\mathrm{i}} = \frac{7+3\mathrm{i}}{48\mathrm{i}} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{2\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{16\mathrm{i}} \; .$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo:

$$\oint_{\gamma_R} f\,dz = \int_{C_R} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz \;= \frac{5\pi}{12} \; .$$

Vediamo cosa succede quando passo al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} \, dz \right| &\leq \int_{C_R} \frac{R^2 + R + 2}{|z^4 + 10z^2 + 9|} |dz| \leq \\ &\leq \int_{C_R} \frac{R^2 + R + 2}{R^4 - 10R^2 - 9} |dz| = \\ &= \pi R \frac{R^2 + R + 2}{R^4 - 10R^2 - 9} \stackrel{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ ; \end{aligned}$$

mentre:

$$\int_{\sigma_R} f(z) \, dz \stackrel{R \to \infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \, dx \ .$$

Quindi:

$$\frac{5\pi}{12} = \lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma_R} f(z) \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

da cui:

$$\frac{5\pi}{12} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \, dx \ .$$

5. Oss: Dobbiamo supporre $a \neq 0$ in quanto altrimenti la funzione non è più integrabile (perchè?).
Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R, \ \mathrm{Im z} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \ .$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito. La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i|a|$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i|a|}} = \frac{4\mathrm{a}^2}{2^6 |\mathrm{a}|^5 \mathrm{i}} \ .$$

Applicando il teorema dei residui e procedendo esattamente come nei due integrali precendenti (le stime sono esattamente le stesse), arriviamo alla conclusione:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} \, dx = \frac{1}{16|a|^3} \ .$$

6. Ovviamente dobbiamo supporre $a \neq 0$ altrimenti la funzione non è integrabile in 0. Applichiamo il teorema dei residui alla funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

ed integriamola sul cammino γ_R definito come nel punto precedente. La funzione ha poli in $z = \pm i|a|$, quindi l'unico polo che si trova all'interno del nostro cammino (quando R è sufficientemente grande) è $z = i|a|$, e il suo residuo:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i|a|}} = \frac{\mathrm{e}^{-|\mathrm{a}|}}{2\mathrm{i}|\mathrm{a}|} .$$

Osserviamo ora i seguenti fatti:

- $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \frac{\pi}{|a|} .$$

- $$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz \right| &\leq \frac{1}{R^2-a^2} \int_{C_r} |e^{iz}|\, |dz| \leq \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to 0} 0 . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx \,+\, i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx . \end{aligned}$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disparità della funzione integranda.
  Possiamo quindi concludere:

  $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2|a|} e^{-|a|} .$$

7. Consideriamo in $\Omega = \mathcal{C} \setminus \{z = iy \mid y \leq 0\}$ consideriamo la determinazione analitica del logaritmo $\log z$ tale che: $\log 1 = 0$ e $\log(-1) = i\pi$.
   Applichiamo il teorema dei residui alla funzione $f(z) = \frac{\log z}{1+z^2}$ analitica in $\Omega \setminus \{i\}$; quindi la nostra funzione ha un polo in $z = i$ e residuo $\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} = \frac{\log \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{4}$. Scegliamo come cammino di integrazione:

   $$\begin{aligned} \gamma_{R,\varepsilon} &= C_R \cup C_\varepsilon \cup \sigma_+ \cup \sigma_- = \{|z| = R,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \\ &\cup \{|z| = \varepsilon,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq -\varepsilon\} \cup \{\varepsilon \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2 i}{2} &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\log|x| + i\pi}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$

Osserviamo che nel calcolo dell'integrale abbiamo stimato (in maniera molto semplice) che gli integrali lungo le due semicirconferenze di raggio R e ε, danno un contributo nullo nel passaggio al limite.

8. Suggerimento: integrare prima per parti e poi distinguere i casi: $0 < \alpha \leq 1$ e $1 < \alpha < 2$.
Il risultato viene:

$$\frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2}}\,.$$

Esercizio 122. (a) Applichiamo il teorema di Rouché con $\gamma = \partial D_1(0)$, e prendiamo $g(z) = 6z^3$. Osserviamo:

- $|g(z)| = 6$ su γ;
- $|P_1(z) - g(z)| \leq 5$ su γ. Quindi dal teorema di Rouché, segue che P_1 e g hanno lo stesso numero di zeri in $D_1(0)$ (contati con molteplicità), e quindi P_1 ha 3 zeri in tale disco.

(b) Cominciamo con vedere quanti zeri ci sono in $D_1(0)$; procediamo come sopra, prendendo $\gamma = \partial D_1(0)$ e $g(z) = -6z$. Si verifica immediatamente che su γ:

$$|P_2(z) - g(z)| \leq 4 < 6 = |g(z)|$$

e quindi dal teorema di Rouché segue che P_2 ha esattamente uno zero in tale disco.

Vediamo cosa possiamodire sugli zeri in $D_2(0)$; prendiamo $\gamma = \partial D_2(0)$ e $g(z) = z^4$. Si verifica facilmente che

$$|P_2(z) - g(z)| \leq 15 < 16 = |g(z)|$$

e quindi dal teorema di Rouché segue che la funzione ha esattamente 4 zeri in tale disco.

Concludendo: P_2 ha tre zeri nell'anello $1 \leq |z| < 2$.

(c) Consideriamo la curva γ_R nel primo quadrante, consistente degli intervalli $[0, R]$, $[0, iR]$ e l'arco di circonferenza di centro 0 e raggio R, congiungente i punti R e iR. E' sufficiente mostrare che per R sufficientemente grande il nostro polinomio ha esattamente uno zero all'interno di γ_R. Applichiamo il teorema di Rouché prendendo come funzione $g(z) = z^4 + 1$ che ha esattamente uno zero interno a γ_R. Ci rimane da controllare che $|P_3(z) - g(z)| \leq |g(z)|$ per $z \in \gamma_R$; infatti:

- $|P_3(x) - g(x)| = |x|^3 < x^4 + 1 = |g(x)|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $|P_3(iy) - g(iy)| = |y|^3 < y^4 + 1 = |g(iy)|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$;
- $|P_3(z) - g(z)| = |z|^3 = R^3 < R^4 - 1 \leq |g(z)|$ per $|z| = R$ (con $R \geq 2$ in modo che $R^4 - 1 > 2R^3 - R^3 = R^3$).

Esercizio 123. Cominciamo col dimostrare il suggerimento: il nostro polinomio ha esattamente n radici contate con la loro molteplicità, quindi lo possiamo fattorizzare: $(z - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$, da cui si vede che il termine noto del polinomio, corrisponde esattamente al prodotto delle radici (cambiate di segno), da cui segue l'affermazione del suggerimento.
Nel nostro caso (non sappiamo niente sul grado del polinomio, quindi avremmo un'indeterminazione nel segno del prodotto delle radici!) il prodotto delle radici di $P(x)$ (contate con molteplicità) è uguale a ± 1. Poiché non ci sono radici all'interno del disco unitario, segue che non ci possono stare nemmeno fuori dal disco (altrimenti il prodotto non potrebbe dare 1 in modulo); quindi tutte le radici si trovano sul cerchio $|z| = 1$. Inoltre sappiamo che $P(0) = -1 < 0$ e che $\lim_{x \to \infty} P(x) = +\infty$ (in quanto il coefficiente direttore del polinomio è positivo), e quindi per continuità, deve esistere una radice sul semiasse reale positivo. Quindi necessariamente $P(1) = 0$.

Esercizio 124. Supponiamo per assurdo che f non sia identicamente nulla e che abbia più di m zeri in Ω, e sia Ω' una sottoregione compatta di Ω con bordo rappresentato da una curva semplice (cioè ogni punto interno, ha indice 1 rispetto a tale curva), e supponiamo che Ω' contenga $l > m$ zeri di f. Applichiamo il principio dell'argomento (usando il fatto che la successione converge uniformemente su Ω'):

$$\begin{aligned} m < l &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega'} \frac{f'}{f}\, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega'} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'}{f_n}\, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \oint_{\partial\Omega'} \frac{f_n'}{f_n}\, dz \leq m \end{aligned}$$

che è una chiara contraddizione!

Esercizio 125. Possiamo assumere senza alcuna perdita di generalità che $f(0) = 0$ (altrimenti applico quando segue alla funzione $g(z) = f(z) - f(0)$). Poichè $f'(0) \neq 0$ ed f è analitica in un intorno di 0, segue che la mia funzione la posso rappresentare nella forma $f(z) = zf_1(z)$ con $f_1'(0) \neq 0$.
Definiamo ora $f_2(z) = f_1(z^n)$, ed osserviamo che esiste un intorno $D_\rho(0)$ tale che $f_2(z) \neq 0$ in ogni punto di tale intorno; in tale intorno (semplicemente connesso) posso definire una determinazione analitica di $\log f_2$ e quindi di $\sqrt[n]{f_2(z)} =: h(z)$ (e quindi $h(z)^n = f_2(z)$ in tale intorno dell'origine).
Concludendo, per ogni $z \in D_\rho(0)$ si ha:

$$f(z^n) = z^n f_1(z^n) = z^n f_2(z) = (zh(z))^n =: g(z)^n$$

con g analitica in tale insieme; e questo conclude la dimostrazione.

Esercizio 126. (i) Osserviamo che $a_2 = \frac{3}{4}$, mentre se $n \geq 3$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) a_{n-1} = \frac{n^2-1}{n^2} a_{n-1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n} a_{n-1} = \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} a_{n-2} = \ldots = \frac{n+1}{n} \frac{4}{3} a_3 = \\ &= \frac{n+1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

(ii) Il suggerimento si dimostra per induzione. Vediamo come utilizzarlo:

$$\begin{aligned} (1+z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n}) &= (1+z) \lim_{m\to\infty} (1+z^{2^n}) = (1+z) \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{2^m-1} z^{2n} = \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{2^m-1} z^{2n} + z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \,. \end{aligned}$$

Esercizio 127. Per dimostrare che θ è una funzione analitica su tutto $\mathcal{C}$, è sufficiente dimostrare che tale prodotto converge uniformememte su ogni compatto di $\mathcal{C}$; per far ciò, mostriamo che la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^{2n-1}e^z + h^{2n-1}e^{-z} + h^{4n-2}|$$

converge totalmente sui dischi $D_R(0)$, per ogni $R > 0$. Infatti, se $|z| \leq R$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^{2n-1}e^z + h^{2n-1}e^{-z} + h^{4n-2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |h|^{2n-1}(2e^R + 1) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |h|^n < \infty \,.$$

Con un conto diretto, si fa vedere che soddisfa anche l'equazione funzionale; infatti:

$$\begin{aligned}
h^{-1}e^{-z}\theta(z) &= h^{-1}e^{-z}\prod_{n\geq 1}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\
&= h^{-1}e^{-z}(1+he^{z})(1+he^{-z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\
&= (1+h^{-1}e^{-z})(1+he^{z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\
&= (1+h^{-1}e^{-z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^{-z})(1+he^{z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^{z}) =
\end{aligned}$$

facendo il cambio di indici: $n = m-1$ (nel primo prodotto) e $n = m+1$ (nel secondo prodotto):

$$\begin{aligned}
h^{-1}e^{-z}\theta(z) &= \ldots = \prod_{m\geq 1}(1+h^{2m-3}e^{-z})\prod_{m\geq 1}(1+h^{2m+1}e^{z}) = \\
&= \prod_{m\geq 1}(1+h^{2m-3}e^{-z})(1+h^{2m+1}e^{z}) = \theta(z+\log h^2)\ .
\end{aligned}$$

Esercizio 128. (a) Osserviamo che tale funzione ha zeri (semplici) in $z = \pm n$; poiché $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, dobbiamo prendere $h = 1$ (genere del prodotto canonico), ottenendo quindi la rappresentazione:

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

con g funzione intera da determinare.

(b) Facciamo la derivata logaritmica dell'uguaglianza sopra ottenuta ottenendo:

$$\pi \cot \pi z = \frac{d(\sin \pi z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\ ;$$

confrontando tale espressione con quella menzionata nel testo dell'esercizio, otteniamo che $g'(z) = 0$ e quindi $g(z) \equiv c$. Poichè il limite

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

si ottiene facilmente che $e^{g(z)} = e^c = \pi$. Quindi abbiamo ottenuto la seguente rappresentazione :

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

(c) Dall'espressione sopra, si vede subito che la funzione è di genere 1; inoltre, mettendo insieme i fattori di indice n e $-n$, otteniamo:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) .$$

(d) Basta osservare:

$$\begin{aligned} \prod_{n\geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{z\to 1} \frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)(1+z)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{\sin \pi(1-z)}{\pi(1-z)} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Esercizio 129. Scriviamoci questo integrale, come integrale lungo la circonferenza unitaria, usando la sostituzione $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, valida per $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} \, d\theta &= \frac{1}{2^{2n}} \int_{S^1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \\ &= \frac{1}{i2^{2n}} \int_{S^1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} \, dz . \end{aligned}$$

La funzione integranda ha in 0 un polo di ordine $2n+1$, quindi avremmo che:

$$\mathrm{Res}_0 = \frac{\mathrm{D_z^{2n}(z^2+1)^{2n}}}{\mathrm{2n!}}_{|\mathrm{z=0}} .$$

Per calcolarci tale residuo, osserviamo il seguente fatto:

$$(1+z^2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} z^{2j}$$

e quindi

$$\mathrm{Res}_0 = \binom{2n}{n} .$$

Applicando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} \, d\theta &= \ldots = \frac{1}{i2^{2n}} \int_{S^1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} \, dz = \\ &= \frac{2\pi i}{2^{2n} i} = \binom{2n}{n} = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \end{aligned}$$

come si verifica facilmente sviluppando i fattoriali.

Esercizio 130. Denotiamo con f_+ la nostra funzione ristretta al semipiano superiore; usando il principio di riflessione di Schwarz segue (poiché assume valori reali su asse reale) che

$$f_+(z) = \overline{f_+(\overline{z})} ;$$

da ciò segue abbastanza facilmente che $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ per ogni $z \in \mathcal{C}$. (Basta infatti osservare che la funzione sopra definita coincide con f su un insieme con parte interna... e quindi devono coincidere dappertutto!).
Ora usiamoil fatto che assume valori immaginari su asse immaginario: definisco una nuova funzione

$$g(z) = if(iz)$$

che sarà ancora analitica su tutto $\mathcal{C}$ e inoltre assumerà valori reali su asse reale. Quindi posso applicare quanto detto sopra all nuova funzione g e concludere che per ogni z:

$$if(iz) = g(z) = \overline{g(\overline{z})} = -i\overline{f(i\overline{z})} .$$

Mettendo insieme i vari risultati:

$$f(iz) = -\overline{f(i\overline{z})} = -\overline{f(\overline{-iz})} = -f(-iz)$$

per ogni $z \in \mathcal{C}$.

Esercizio 131. (i) La funzione f soddisfa il teorema di cauchy (in quanto analitica) quindi:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f(z}{z} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \, d\theta ; \end{aligned}$$

questa proprietà è anche detta *Proprietà del Valor medio* (infatti, il valore al centro è dato dal valore medio dei valori che assume su una qualsiasi circonferenza di centro l'origine, e contenuta all'interno del dominio di analiticità).

(ii) La risposta è affermativa! Diamo ora una rappresentazione integrale di tale funzione.
(IDEA: Vogliamo utilizzare la proprietà del valore medio, per trovare il valore della funzione in un generico punto z_0 interno al cerchio unitario. Cercheremo una trasformazione lineare fratta che mappi il disco unitario in se stesso, in modo da mandare il punto z_0 nel centro...)
Sia quindi z_0 tale che $|z_0| < 1$; la TFL che mappa il disco unitario in se stesso, mandando z_0 in 0, è data da

$$S(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} .$$

Definiamo la nuova funzione $g = f \circ S^{-1}$: è ancora analitica sul disco unitario chiuso, quindi posso applicare il teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= g(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f \circ S^{-1}(z)}{z} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1 - |z_0|^2}{|\xi - z_0|^2} \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} \, d\theta \end{aligned}$$

dove il termine $\frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\theta}-z_0|^2}$ è detto *Nucleo di Poisson*. Abbiamo definito una funzione analitica nel disco unitario, che soddisfa il problema al contorno assegnato (un problema di questa forma è detto *Problema di Dirichlet*.

(iii) Chiaramente la soluzione è unica. Infatti l'unicità segue proprio da come l'abbiamo costruita, usando cioè la proprietà del valore medio... l'unicità si può anche vedere da un altro punto di vista: supponiamo che ne esistano due: allora avremmo trovato due funzioni analitiche che coincidono su un insieme che ha punti di accumulazioni... e quindi devono coincidere dappertutto!

(iv) Nel caso di un generico dominio $\overline{\Omega}$ chiuso e semplicemente connesso, per il teorema della mappa di Riemann riesco a trovare un diffeomorfismo analitico che mi mappi tale dominio nel cerchi unitario. Ragionando come sopra si ottiene l'esistenza di una soluzione anche in questo caso.
Nota: Forse dovremmo discutere meglio cosa succede al bordo... questo non è un problema molto semplice, e bisognerebbe sviluppare una teoria topologica abbastanza complicata (Teoria di Caratheodory) e introdurre il concetto di *Prime ends*. Per chi volesse approfondire questo punto di vista, può consultare le note Complex Dynamical Systems, John Milnor (scaricabili dal sito web dell'università SUNY at Stony Brook).

(v) La proprietà fondamentale che abbiamo usato è la proprietà del valore medio!! Quindi questo ragionamento si potrebbe applicare a qualsiasi funzione che goda di tale proprietà. Un caso interessante è il caso delle funzioni armoniche... quanto abbiamo detto, altri non è se non la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni del problema di Poisson per funzioni armoniche, su domini semplicemente connessi.

Esercizio 132. (i) Basta prendere la seguente funzione:

$$g(z) = f(\frac{1}{2\pi i} \log z) \, .$$

osserviamo che nonostante non sia possibile definire in tale dominio una determinazione analitica del logaritmo, la composizione di queste due funzioni è analitica su D^*: infatti la $1-$ periodicità della f, elimina ogni

eventuale problema derivante dall'argomento del logaritmo! (naturalmente si può fare una discussione molto più formale di tutto ciò...)
Proprio per come è stata costruita si ha:

$$g(e^{2\pi i z}) = f(z)$$

per ogni $z \in \Sigma^+$.

(ii) La serie di Laurent per gè data da:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dove:

$$c_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}$$

con $0 < r < 1$.

(iii) Basta semplicemente calcolare la serie di L. della g nei punti $e^{2\pi i z}$, per ogni $z \in \Sigma^+$ e applicare quanto visto nel punto (i).

Esercizio 133. Risultati:

$$\begin{array}{ll}
a) & 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\
b) & \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\
c) & \pi(a - \sqrt{a^2 - 1}) \\
d) & \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \\
e) & \frac{\pi}{b \sin\left(\frac{\pi}{b}\right)} \\
f) & \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)} \\
g) & \frac{\log^2 a - \log^2 b}{2(a - b)} \\
h) & \frac{35}{128}\pi \\
i) & \pi(\sqrt{2} - 1)\,.
\end{array}$$

Appendice A

Esercizi proposti (non svolti)

Esercizio 1. Sia u_n una successione di funzioni continue su $[a, b]$. Dimostrare che se u_n converge uniformemente in (a, b), allora converge uniformemente in $[a, b]$.
Dedurre che se u_n converge puntualmente in (a, b), ma la successione $u_n(a)$ (o analogamente $u_n(b)$) non converge, allora u_n non può convergere uniformemente in (a, b).
Rileggere i risultati sopra, nel caso delle serie di funzioni.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(x + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{x}{n}}$$

sulla semiretta $\{x > 0\}$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \; .$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n\geq 1} x^{\sqrt{n}}$ $\qquad$ (b) $\sum_{n\geq 1} \log \sqrt[n]{1 + \frac{x}{n}}$ $\qquad$ (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^4+x^2}$

Esercizio 5. Dimostrare che $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin nx}{n!}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ e calcolarne la somma.
(Sugg.: Ricordarsi la formula di Eulero $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$).

Esercizio 6. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

(a) $\sum_{n\geq 1}(2^{3n}+3^{2n})\, x^n$ (b) $\sum_{n\geq 1} n^3\, x^{2n+1}$ (c) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^n x^{2n}$

(d) $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{4n^2+7n+1}{n^3+18n+2}\right)^n x^n$ (e) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n$ (f) $\sum_{n\geq 1}\sin n\frac{\pi}{4}\, x^{2n}$

Esercizio 7. Sia

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-e^{-\frac{x^2+y^2}{|x|}}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Dimostrare che:

- f è continua in $(0,0)$;
- f ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$;
- f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 8. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to 0} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

(c) $\lim_{(x,y)\to 0}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ (d) $\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\sin(xy)}{y}$

Esercizio 9. Le seguenti funzioni sono differenziabili nell'origine?

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{se } x>0\\ x+ye^{-x^2} & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=[\mathrm{arctg}(y+1)]^{x+1}$
4. $f(x,y)=\log_{y+1}(x+1)$

Esercizio 10. Determinare le rette normali al paraboloide $z=x^2+y^2-1$ che passano per l'origine. Che angolo formano con l'asse delle z ?

Esercizio 11. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è continua in $(0,0)$? E' differenziabile in $(0,0)$?

Esercizio 12. Trovare, se esiste, l'equazione del piano tangente al grafico di $z = \sqrt{x^2+y^2}$ in $A = (0,1,1)$, $B = (3,4,5)$ e $C = (0,0,0)$.
Sia $z = x^2 + y^2$; trovare, se esiste, il piano tangente al grafico che:

1. sia parallelo al piano $2x + 4y - z = 0$;
2. sia normale all'asse z;
3. contenga la retta $x = 1$, $y = 1$.

Esercizio 13. Sia $z = x^y$, con $x = \cos t$ e $y = \sin t$. Calcolare $\frac{dz(t)}{dt}$.
Sia $z = x^2 y$ con

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = ue^v \end{cases} .$$

Calcolare $\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}$ e $\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}$.

Esercizio 14. Calcolare max e min della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

nel dominio $\mathcal{D} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Esercizio 15. Calcolare max e min su $\mathbb{R}^2$, delle funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$;
2. $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ al variare di $a, b > 0$.

Esercizio 16. Calcolare max e min della funzione

$$f(x,y) = ye^{y^2-x^2}$$

nel dominio $\mathcal{D} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + |y| \leq 1\}$.

Esercizio 17. Espandere $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ in serie di potenze di $(x-1)$ e $(y+2)$. Farlo in due modi diversi, uno dei quali usando le derivate.

Esercizio 18. Calcolare max e min della funzione

$$f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$$

nel dominio $\mathcal{K} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq y \leq 2x\}$.

Esercizio 19. Calcolare max e min della funzione

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$$

nel dominio $\mathcal{D} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 20. Calcolare massimi e minimi (relativi e assoluti) della funzione:

$$f(x,y,z) = xye^{-z^2}$$

nel dominio $\mathcal{D} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 4x^2 + y^2 - z^2 \geq 1\}$.

Esercizio 21. Si consideri $T : \ \mathcal{C}([-1,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([-1,1])$ definita nel modo seguente:

$$Tu(x) \equiv \frac{x}{2}u(\frac{x}{2}) + g(x) .$$

1. Per quali g, T é lineare?
2. T é una contrazione? T é continua?
3. Dimostrare che $\exists!\ u$ tc $u = Tu$.
4. Dimostrare che 3) vale anche se $T : \ \mathcal{C}([-a,a]) \longrightarrow \mathcal{C}([-a,a])$ con $a > 0$ qualunque.

Esercizio 22. Si consideri

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 && \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) && \longrightarrow f(x,y) = -xe^y + 2y - 1 . \end{aligned}$$

1. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ con $x_0 \leq 0$ un punto tale che $f(x_0, y_0) = 0$. In un intorno di P_0, si puó esplicitare la y?

2. Taylor all'ordine 2 della funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0, \frac{1}{2})$;
3. Quali sono i punti di $\{(x, y) : \ f(x, y) = 0\}$ in un intorno dei quali non si puó esplicitare $y(x)$?

Esercizio 23. Sia
$$E \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = xy + 1\}.$$

1. Dire se E é una superficie, cioè se nell'intorno di ogni punto si puó esplicitare almeno una variabile;
2. E non é compatta;
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ammette un minimo assoluto su E; determinarlo;
4. E é connessa? Determinare $f(E)$;
5. Determinare lo spazio tangente a E in $(-1, 1, 0)$.

Esercizio 24. Sia
$$\Gamma \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x^2 - y^2 \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Dimostrare che Γ é varietá compatta;
2. Determinare massimi e minimi assoluti di f su Γ, dove $f(x, y, z) = x$;
3. Punti di intersezione di Γ con piano (x, y); sia P quello nel primo quadrante;
4. Equazione della retta tangente a Γ in P;
5. Parametrizzare Γ in un intorno di P.

Esercizio 25. Calcolare i seguenti integrali doppi:

i)	$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$	dove	$\mathcal{D} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \ \frac{1}{x} \le y \le x\}$
ii)	$\iint_D x^2y^2 \, dxdy$	dove	$\mathcal{D} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \le 1\}$
iii)	$\iint_D y^3e^x \, dxdy$	dove	$\mathcal{D} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \ge 0, \ x \le 1, \ x \ge y^2\}$
iv)	$\iint_D xy \, dxdy$	dove	$\mathcal{D} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \ge 1, \ x^2 + y^2 \le 1\}$

Esercizio 26. Dimostrare che:
$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy = \frac{1}{2} \qquad \text{mentre} \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx = -\frac{1}{2}\ .$$
Come mai in questo caso non si può scambiare l'ordine d'integrazione?

Esercizio 27. Determinare il volume della regione di spazio comune ai due cilindri

$$\mathcal{C}_1 \equiv \{x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}_2 \equiv \{x^2 + z^2 \leq 1\}\,.$$

Esercizio 28. Una lamina quadrata di lato l, ha una densità specifica $\rho(x, y)$ che è proporzionale alla distanza da un suo vertice (con fattore di proporzionalità k).
Si determini la massa della lamina.

Esercizio 29. Usando il teorema di Pappo, calcolare il volume del pallone da Rugby:

$$\mathcal{P} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\} \qquad \text{con } 0 < a < b\,.$$

Esercizio 30. Trovare la distanza media dei punti di un cerchio di raggio r, da un punto sulla circonferenza.

Esercizio 31. Determinare il baricentro della regione di piano determinata dalle parabole:

$$y^2 = 4x + 4 \qquad \text{e} \qquad y^2 = -2x + 4\,.$$

Esercizio 32. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D x^2 dxdydz$$

dove $\mathcal{D}$ è l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Esercizio 33. Trovare il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, compresa tra la superficie di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ e il piano di equazione $x + y + z = 4$.

Esercizio 34. Trovare la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^3$ con la $\|.\|_1$. Usando questo risultato, trovare la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^4$ con la $\|.\|_1$.
(Facoltativo): Generalizzare il risultato precedente nel caso di una palla n-dimensionale.

Esercizio 35. Calcolare:

$$\iint_{\mathcal{A}_c} \frac{1}{1+3x^2+y^2} dxdy$$

dove $\mathcal{A}_c \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x^2+y^2 \leq c^2\}, \quad c>0.$
Calcolare inoltre:

$$\iiint_A \frac{z}{1+3x^2+y^2} dxdydz$$

dove $\mathcal{A} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 3x^2+y^2 \leq (z-2)^2,\ 0<z<1\}.$

Esercizio 36. (Costruzione di un insieme di Cantor in $\mathbb{R}^2$: la spugna di Sierpinski).
Sia $\mathcal{S}_0 \equiv [0,1]\text{x}[0,1]$, e consideriamo l'insieme ottenuto eliminando il quadrato centrale aperto di lato $\frac{1}{3}$; chiamiamo l'insieme così ottenuto $\mathcal{S}_1$.
Ripetiamo il passo precedente a ciascuno dei quadrati di lato $\frac{1}{3}$ che costituiscono $\mathcal{S}_1$ (eliminando il quadrato centrale aperto di lato $\frac{1}{3^2}$).
Iterando il procedimento, si costruisce induttivamente una successione $\{\mathcal{S}_n\}$, in cui ciascun $\mathcal{S}_n$ è ottenuto dal precedente eliminando, da ciascuno dei quadrati di lato $\frac{1}{3^{n-1}}$ che lo costituiscono, il quadrato centrale aperto di lato $\frac{1}{3^n}$.
Si definisca $\mathcal{S} \equiv \cap_n \mathcal{S}_n$; dimostrare che:

1. $\mathcal{S}$ è chiuso e non vuoto;
2. $\mathcal{S}$ è perfetto [1] (dedurre da ciò che è più che numerabile);
3. $\mathcal{S}$ è connesso;
4. $\mathcal{S}$ è Peano-Jordan misurabile. Qual è la sua misura?

Esercizio 37. Si definisca:

$$\mathcal{D}_n \equiv \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1\};$$

Calcolare:

1. $\mathcal{J}_2 = \int_{\mathcal{D}_2} xy\, dxdy$;
2. $\mathcal{J}_3 = \int_{\mathcal{D}_3} xyz\, dxdydz$;
3. $\mathcal{J}_n = \int_{\mathcal{D}_n} x_1 \ldots x_n\, dx_1 \ldots dx_n$;

[1] Cioè è un chiuso in cui ogni suo punto è di accumulazione;

Esercizio 38. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint T x^2(y-x^3)e^{y+x^3}\,dxdy$$

dove:

$$\mathcal{T} \equiv \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^3 \le y \le 3, x \ge 1\}.$$

Esercizio 39. Sia $\mathcal{E} \equiv \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad y^2 \le x^2(1-|x|)\}$.

1. Disegnare $\mathcal{E}$ e trovarne l'area;
2. Trovare il baricentro della porzione di $\mathcal{E}$ contenuta nel I quadrante;
3. Trovare il baricentro della porzione di $\mathcal{E}$ contenuta nel semipiano $\{x>0\}$;
4. Trovare il volume dei solidi $\mathcal{S}_x$ e $\mathcal{S}_y$, ottenuti facendo ruotare $\mathcal{E}$ attorno agli assi x e y rispettivamente.

Esercizio 40. Sia $f_n : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali t.c.

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$

Si indichi con Γ_n il grafico di f_n e con Γ il grafico di f:

- E' vero che se $L(\Gamma_n) \le M$ definitivamente, allora $L(\Gamma) \le M$?
- E' vero che se $L(\Gamma_n) \ge M$ definitivamente, allora $L(\Gamma) \ge M$?

Esercizio 41. Dimostrare che $\exists c \in \mathbb{R}$, t.c.:

- $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^4+y^4)}dxdy = \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \quad \forall\lambda > 0\,.$
- Dimostrare che $\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} \le c \le \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2}$.

Esercizio 42. Calcolare:

$$\lim_{r\mapsto+\infty} e^{-r}\iint_{B(0,r)} e^{|x|+|y|}dxdy\,.$$

Esercizio 43. Calcolare l'area del dominio di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{D} \equiv \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x>0,\ |\log x| \le 1,\ |y - x\log x| \le 1\}\ .$$

Esercizio 44. Dimostrare la disuguaglianza di Jensen:
Se $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione convessa, allora:

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \le \int_0^1 \varphi(f(x)dx\ .$$

Esercizio 45. Sia $M \ge 1$ un intero. Dire per quali valori del parametro α si ha che:

$$\iint_{\mathcal{D}_\alpha} \frac{1}{(x^2+y^2)^M} dxdy < +\infty$$

dove: $\mathcal{D}_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \ge 0,\ 0 \le y \le x^\alpha\}$.

Esercizio 46. Sia $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad y^2+z^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = a^2\}$. Si determini per quali valori di α:

1. Γ è compatto;
2. Γ è connesso;
3. Γ è il supporto di una o più curve chiuse, e darne una parametrizzazione.

Esercizio 47. Calcolare:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Esercizio 48. Siano $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ aperti e sia ω una 1-forma chiusa, esatta in $\mathcal{U}$ e su $\mathcal{V}$. E' vero che ω è esatta su $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$? E su $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$?
Che cosa succede se $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ è t.c. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è connesso?

Esercizio 49. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$$

definita su tutto $\mathbb{R}^2$.
E' chiusa? E' esatta? Se è esatta, trovarne una primitiva.

Esercizio 50. Quali di queste 1-forme sono chiuse?

1. $\omega_1 = x^3dx + y^2dy + zdz$

2. $\omega_2 = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy$

3. $\omega_3 = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

4. $\omega_4 = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy + \frac{z}{x^2+y^2}dz$

Esercizio 51. Sia $|\mathcal{A}(x,y)| \leq k$ e $|\mathcal{B}(x,y)| \leq k \quad \forall x, y \in \Omega$.
Dimostrare che:

$$\left| \int_\Gamma \mathcal{A}(x,y)dx + \mathcal{B}(x,y)dy \right| \leq \sqrt{2}kl(\Gamma)$$

dove $l(\Gamma)$ è la lunghezza della curva Γ.

Esercizio 52. Determinare $\varphi(x,y)$ (a meno di una funzione della sola y) in modo tale che le seguenti 1-forme siano esatte:

$$i)\ x^2ydx + \varphi(x,y)dy\,; \qquad ii)\ \sin y dx + \varphi(x,y)dy\,.$$

Esercizio 53.

1. Determinare l'area racchiusa tra la cicloide:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e l'asse delle x.

2. Calcolare l'area racchiusa all'interno della lemniscata di equazione:

$$r(\theta)^2 = 2a^2 \cos 2\theta \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 54. Sia ω una 1-forma definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si supponga che per ogni curva chiusa γ si abbia che $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Q}$.
Si dimostri che ω è chiusa.
(Sugg.: Osservare che la chiusura è equivalente all'esattezza locale)

Esercizio 55. Consideriamo la 1-forma:

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx \;+\; (x^2 + 2yz)dy \;+\; (y^2 - z^2)dz$$

1. Per quali $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, ω è esatta?

2. Una di queste P è identicamente nulla sull'asse delle x? Per questa P trovare una primitiva.

Esercizio 56. Per quali $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, la 1-forma su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega(x,y) = \frac{Ax + By}{x^2 + y^2}dx \; + \; \frac{Cx + Dy}{x^2 + y^2}dy$$

è chiusa? è esatta? Quando è esatta, trovarne una primitiva.

Esercizio 57. La 1-forma $\omega(x,y) = (3yx^2 - 1)dx + 2x^3dy$ non è esatta. Trovare $\varphi \in \mathcal{C}^1((0,+\infty),\mathbb{R})$ t.c.:

$$\widetilde{\omega}\,(x,y) = \varphi(x)\omega$$

sia esatta su $(0,+\infty)$x$\mathbb{R}$. Trovare tali φ e le primitive delle $\widetilde{\omega}$ così ottenute.

Esercizio 58. Si consideri la 1-forma:

$$\omega = \frac{2(x^2 - y^2 - 1)dy - 4xydx}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}$$

Dimostrare che il suo insieme di definizione è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0) \cup (-1,0)\}$.
Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze di centri rispettivamente $(1,0)$ e $(-1,0)$ e di raggi così piccoli che γ_1 non contenga all'interno $(-1,0)$ e γ_2 non contenga $(1,0)$. Siano percorse in senso antiorario. Si dimostri:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} \omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} \omega = 1$$

Esercizio 59. Sia ω una 1-forma su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che condizione necessaria perchè ω ammetta un fattore integrante è che esista una 1-forma α t.c.:

$$d\omega = \omega \wedge \alpha.$$

Verificare in questo modo che la 1-forma su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = dy - mdx$$

non ammette un fattore integrante.

Esercizio 60. Sia $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ una 1-forma. Verificare che :

$$\omega \text{ ammette un fattore integrante} \Leftrightarrow (A,B,C) \perp \mathrm{rot}(A,B,C).$$

Esercizio 61. Si consideri nel piano la 1-forma:

$$\omega = xdy - ydx.$$

Non è chiusa però $\varphi(x,y) = \frac{1}{xy}$ e $\psi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ sono due fattori integranti (locali, s'intende).
Si dimostri che se $\gamma(t)$ soddisfa: $\omega(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ allora $\frac{\varphi(\gamma(t))}{\psi(\gamma(t))} = \text{cost.}$ (cioè il loro rapporto è un integrale).
Sia ω una 1-forma su $\mathbb{R}^n$. Si dimostri in generale che se ammette due fattori integranti, allora il loro rapporto è un integrale.

Esercizio 62. Siano Ω, $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ aperti e

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

un diffeomorfismo. Sia $\gamma \in C^1([a,b], \Omega')$ una curva e sia $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$. Si dimostri che

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = \left(\varphi'_{|_{\tilde{\gamma}(t)}}\right)^{-1} \dot{\gamma}(t)\,.$$

Sia ora V un campo vettoriale su Ω', cioè un'applicazione

$$V : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^n\,.$$

Si usi il precedente risultato per definire il *pull-back* di V, cioè:

$$\varphi^* V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n\,.$$

Si dimostri che se ω è una 1-forma differenziale su Ω', allora

$$(\varphi^*\omega) \cdot (\varphi^* V) = \omega \cdot V\,.$$

Esercizio 63. Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ e consideriamo la superficie parametrica

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Q & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longrightarrow & (u+v, u-v, uv)\,. \end{array}$$

Sia

$$\omega = xdy \wedge dz + ydx \wedge dz\,.$$

Calcolare

$$\iint_{\varphi(Q)} \omega = \iint_Q \varphi_* \omega\,.$$

Esercizio 64. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua; si definisca:

$$\mu_f(x,r) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy\,.$$

1. Dimostrare che $\lim_{r\to 0} \mu_f(x,r) = f(x)\,.$

2. Dimostrare che <u>non</u> esiste una funzione $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tale che

$$\mu_f(x,r) = xyz + r\,.$$

Esercizio 65. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 tale che il flusso uscente da ogni palla $B(x,r)$ è dato da

$$7xr^3 + xyzr^4\,.$$

Qual è la sua divergenza? Calcolare il flusso di F attraverso il cubo di centro l'origine e con vertice in $(2,2,2)$.

Esercizio 66. <u>(Formule di Gauss)</u>
Siano

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_m, y_m) = (x_0, y_0)$$

i vertici di una poligonale chiusa senza autointersezioni. Dimostrare che l'area della regione interna alla poligonale è data da:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{m}(x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1})\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{m} y_n(x_{n+1} - x_n)\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{m} x_n(y_{n+1} - y_n)\right|\,. \end{aligned}$$

Esercizio 67. <u>(Teorema di Guldino per le superfici di rotazione)</u>
Dimostrare il seguente teorema:
L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo α della curva regolare γ è data dalla lunghezza di γ per la lunghezza di arco di circonferenza percorsa dal suo baricentro.
Dedurre da tale teorema che l'area del toro di raggi $r < R$ è dato da $A = 4\pi^2 Rr$.

Esercizio 68. Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cicloide, di equazione:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

attorno all'asse x.

Esercizio 69. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S x^2 \, d\sigma$$

dove $\mathcal{S} = \partial B(0,1)$.

Esercizio 70. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z \, d\sigma$$

dove Σ è il grafico della funzione $z = xy$ sull'insieme

$$U = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}\,.$$

Esercizio 71. Calcolare l'integrale

$$\int_\varphi x \, ds$$

dove φ è la curva $y = x^2$ con $0 \leq x \leq a$.

Esercizio 72. Un iperboloide di rotazione ha equazione $\rho = \sqrt{z^2 + 1}$, cioè

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1\,.$$

Calcolare l'area della sua porzione fra $z = 0$ e $z = 1$.

Esercizio 73. Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{y} \, dx \, dy$$

dove

$$D = \{(x,y) : \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{y} \leq 1, \ \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1\}.$$

Esercizio 74. Calcolare il volume di

$$D = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \; z \leq 2(x^2 + y^2)\}\,.$$

Esercizio 75. Si ponga

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^3(nx)}{n!}\,.$$

Si dimostri che la serie converge uniformemente con tutte le sue derivate, e quindi $f \in C^\infty(S^1)$. Si calcoli la serie di Fourier di f.

Esercizio 76. Calcolare la serie di Fourier della funzione periodica dispari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$. Usare Parseval per calcolare

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}\,.$$

Esercizio 77. Dimostrare che se $f \in C^m(S^1, \mathcal{C})$, allora i suoi coefficienti di Fourier soddisfano la maggiorazione:

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^m}\,. \tag{A.1}$$

Viceversa, se è vero (A.1) con $m \geq 2$, allora $f \in C^{m-2}(S^1, \mathcal{C})$.

Esercizio 78. Sia $f \in C^2(S^1, \mathbb{R})$ tale che

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0\,.$$

Usando gli sviluppo di Fourier di f e di f' dimostrare che:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt\,.$$

Quando vale l'uguaglianza?

Esercizio 79. Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

(i) $(i - \sqrt{3})^{14}$;

(ii) $\dfrac{1 + \cos\theta - i \sin\theta}{1 + \cos\theta + i \sin\theta}$;

(iii) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$;

(iv) $(2+i)^7 + (2-i)^7$;

(v) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

Esercizio 80. Calcolare

(i) $\dfrac{1}{2i}(i^5 - i^{-5})$;

(ii) $\sqrt[5]{\sqrt{3} - i}$.

Esercizio 81. Utilizzando la rappresentazione di Eulero dei numeri complessi, esprimere $\cos n\theta$ come polinomio in $\cos\theta$. Determinare, in funzione di n il grado del polinomio.

Esercizio 82. Sia $|z| = 1$ ed $m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che le radici di

$$\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)^m = z$$

sono tutte reali e distinte.

Esercizio 83. Date (z_0, z_1, z_2, z_3) e (w_0, w_1, w_2, w_3) due quadruple di numeri complessi distinti, mostrare che:
Esiste $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *TLF che porta gli* z_i *nei* w_i*, se e solo se i birapporti sono uguali, cioè:*

$$\left(\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}\right) / \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right) = \left(\frac{w_0 - w_2}{w_0 - w_3}\right) / \left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right).$$

Inoltre (z_0, z_1, z_2, z_3) *stanno tutti su un cerchio o una retta, se e solo se il loro birapporto è reale.*

Esercizio 84. Trovare tutti i cerchi ortogonali sia a $|z| = 1$ che a $|z-1| = 4$.

Esercizio 85. Sia $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Trovare (z_1, z_2, z_3) in termini di (a, b, c, d) in modo che

$$Tz = [z, z_1, z_2, z_3] := \left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right) / \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right).$$

Esercizio 86. Sia $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Dimostrare che $T(\mathbb{R} \cup \infty)$ se e solo se a, b, c, d si possono prendere in $\mathbb{R}$.
Trovare inoltre condizioni necessarie e sufficienti affinché $T(S^1) = S^1$.

Esercizio 87. Si consideriano due cerchi, uno interno all'altro e tangenti in un punto. Sia G la regione tra questi due cerchi. Trovare una mappa olomorfa bietttiva che mappa G nel disco unità.

Esercizio 88. Sia

$$G = \{z :\ 0 < |z| < 1\}\,.$$

Esiste una mappa olomorfa biettiva da G nel disco unità?

Esercizio 89. Calcolare

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz\,.$$

Esercizio 90. Calcolare

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\,.$$

Esercizio 91. Siano $\rho > 0$ ed $a \in \mathcal{C}$, t.c. $\rho \neq |a|$. Calcolare

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2}\,.$$

(Ricordarsi che $z\overline{z} = \rho^2$ e che $|dz| = -i\rho\dfrac{dz}{z}$).

Esercizio 92. Sia f una funnzione analitica in $|z| < 1$, tale che

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}\,.$$

Qual è la migliore stima di $|f^{(n)}(0)|$ che si può ottenere dalla formula di Cauchy?

Esercizio 93. Sia f una funzione analitica su $D_R \equiv \{|z| \leq R\}$, tale che

$$|f(z)| \leq M$$

per ogni $z \in D_R$. Trovare una stima su $|f^{(n)}(z)|$ che valga uniformemente in D_ρ, con $\rho < R$.

Esercizio 94. Dimostrare che se $f \in H(\mathcal{C})$ e

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \,,$$

allora f è un polinomio.

Esercizio 95. Dimostrare che se

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \text{per} \quad |z| < 1 \,,$$

allora $|f'(0)| \leq 1$, indipendentemente dal valore di $f(0)$.

Esercizio 96. Sia f una funzione olomorfa che manda il semipiano superiore

$$\Pi^+ \equiv \{z \in \mathcal{C} : \; \mathrm{Imz} > 0\}$$

in se stesso e tale che $f(i) = i$.

1. Ricavare una stima su $|f'(i)|$.
2. Per quali funzioni viene assunto il valore massimo?

Esercizio 97. Sia $\Omega \subset \mathcal{C}$ aperto. Sotto quali condizioni $|f|$ può avere un minimo locale in Ω ?

Esercizio 98. Si consideri $f \in H(\Pi^+)$ e $|f| \leq 1$. Quanto può essere grande $|f'(i)|$? Quali sono le funzioni su cui il massimo è assunto?

Esercizio 99. Si determini il tipo di singolarità (rimuovibile, polo, singolarità essenziale) delle seguenti funzioni nell'origine. Se si tratta di un polo, se ne determini l'ordine e lo sviluppo di Laurent.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$
2. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$
3. $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2}$
4. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$
5. $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$

6. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$

7. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

8. $f(z) = \dfrac{1}{z} \cos \dfrac{1}{z}$

9. $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$

10. $f(z) = z^n \sin \dfrac{1}{z}$

Esercizio 100. Sia
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \, .$$
Dare lo sviluppo di Laurent di f negli anelli:

$$(a)\ B(0,1) \setminus \{0\} \qquad (b)\ B(0,2) \setminus B(0,1) \qquad (c)\ \mathcal{C} \setminus B(0,2)$$

Esercizio 101. Dimostrare che $f(z) = \tan z$ è analitica in $\mathcal{C}$ tranne per poli semplici nei punti $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Determinare la parte singolare di f in ciascuno di questi poli.

Esercizio 102. Sia $G \subset \mathcal{C}$ aperto. Se $f : G \to \mathcal{C}$ ha solo poli, dimostrare che non possono avere un punto di accumulazione in G

Esercizio 103. Sia d la distanza iperbolica sul disco unitario. Dimostrare che
$$d(z,w) = \log \left(\frac{|1 - z\overline{w}| + |z - w|}{|1 - z\overline{w}| - |z - w|} \right) ,$$
ovvero, la distanza è il logaritmo del birapporto dei 4 punti in figura:

Esercizio 104. Sia d la distanza iperbolica sul disco unitario. Dimostrare che
$$d(z,w) = \log \left(\frac{|1 - z\overline{w}| + |z - w|}{|1 - z\overline{w}| - |z - w|} \right) ,$$
ovvero, la distanza è il logaritmo del birapporto dei 4 punti in figura :

manca la figura...

ovvero $d(z,w) = \log \left(\dfrac{(P-w)(z-Q)}{(P-z)(Q-w)} \right)$.

Esercizio 105. Si calcolino i seguenti integrali definiti, usando il **teorema dei residui**.

$$
\begin{array}{lll}
a) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{x^2+a^2} & a>0 \\
b) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{(x^2+a^2)^2} & a>0 \\
c) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx & \\
d) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{x^4+1} & \\
e) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+1}\,dx & a\in\mathbb{R} \\
f) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,dx & a\in\mathbb{R}\,,\ b>0 \\
g) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx\,. &
\end{array}
$$