Esercizi di Analisi Matematica II

Dott.ssa R. Toader

Università di Udine, CdL Ingegneria Elettronica,
a.a. 2009/2010

1. Si considerino le due funzioni $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definite:

$$f(x,y) = (x^2, y^2)\,, \quad g(x,y) = (\sin(x^2y^2), \cos(x^2+y^2))\,.$$

Si studi la differenziabilità di f, g, $f \circ g$ e $g \circ f$ e se ne scrivano le matrici jacobiane, facendo uso del teorema del differenziale di una funzione composta.

2. Dire se la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\|(x,y,z)\|}(x^2, y^2, z^2) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

è differenziabile.

3. Siano $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ le funzioni così definite:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1x_2x_3, x_3)\,, \quad g(x_1,x_2,x_3) = (x_3, x_1x_2x_3, x_1)\,.$$

Scrivere le matrici jacobiane di f, g, $f \circ g$ e $g \circ f$.

4. Siano $f_1, f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ due funzioni differenziabili tali che

$$f_1(0,0) = (1,0)\,, \qquad f_2(1,0) = (0,0)\,,$$

con matrici jacobiane

$$J_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\,, \qquad J_{f_2}(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Calcolare le matrici jacobiane $J_{f_1 \circ f_2}(1,0)$ e $J_{f_2 \circ f_1}(0,0)$.