Esercizi sul calcolo di flussi, il teorema della divergenza, e la formula di Stokes

Esercizio 1. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i}_1 + \frac{3y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i}_2 + \overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie $\mathcal{S}$ di rappresentazione parametrica

$$\overrightarrow{r}(u,v) = u\cos(v)\overrightarrow{i}_1 + u\sin(v)\overrightarrow{i}_2 + u^2\overrightarrow{i}_3, \qquad u \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ v \in [0, 2\pi],$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

Svolgimento. Osserviamo che, denotando con x, y, e z le componenti di $\overrightarrow{r}$, si ha

$$z(u,v) = x^2(u,v) + y^2(u,v) \qquad \forall\, u \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ \forall\, v \in [0, 2\pi],$$

infatti $\mathcal{S}$ è la porzione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ compresa fra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{4}$. Per calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso $\mathcal{S}$ non posso applicare il teorema della divergenza, poiché il volume che ha come bordo $\mathcal{S}$ non è un aperto. È infatti l'unione dell'aperto $\{x^2 + y^2 < z,\ 0 < z < \frac{1}{4}\}$ con il "coperchio del paraboloide" $\{x^2 + y^2 = z,\ z = \frac{1}{4}\}$. Quindi calcoliamo il flusso direttamente.

Determiniamo il vettore normale a $\mathcal{S}$: si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \cos(v)\overrightarrow{i}_1 + \sin(v)\overrightarrow{i}_2 + 2u\overrightarrow{i}_3, \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = -u\sin(v)\overrightarrow{i}_1 + u\cos(v)\overrightarrow{i}_2 + 0\overrightarrow{i}_3, \end{cases}$$

da cui

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = -2u^2\cos(v)\overrightarrow{i}_1 - 2u^2\sin(v)\overrightarrow{i}_2 + u\overrightarrow{i}_3.$$

Quindi il versore normale a $\mathcal{S}$ che punta verso il basso è

$$\overrightarrow{n} = -\frac{1}{\|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\|}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\right) = \frac{1}{4u^4 + u^2}\left(2u^2\cos(v)\overrightarrow{i}_1 + 2u^2\sin(v)\overrightarrow{i}_2 - u\overrightarrow{i}_3\right)$$

(infatti la sua componente rispetto al versore $\overrightarrow{i}_3$ è $-u \le 0$). Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S &= \iint_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{[0,1/2]\times[0,2\pi]} \left(4\cos^2(v)u + 6\sin^2(v)u - u\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \left(\int_0^{1/2} u\, \mathrm{d}u\right)\left(4\int_0^{2\pi} \cos^2(v)\, \mathrm{d}v + 6\int_0^{2\pi} \sin^2(v)\, \mathrm{d}v - \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}v\right) = \ldots = \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare il flusso del rotore del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\overrightarrow{i}_1 + xy\overrightarrow{i}_2 + 0\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la regione piana $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con

$$\mathcal{S}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2}\right\}.$$

Svolgimento. Applichiamo la formula di Stokes, osservando che il bordo $\Gamma = \partial\mathcal{S}$ è data da $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con

$$\begin{cases} \Gamma_1 \text{ segmento fra } (0,0) \text{ e } (\sqrt{2},0) \\ \Gamma_2 \text{ arco della circonferenza } x^2+y^2=2 \text{ da } (\sqrt{2},0) \text{ a } (1,1) \\ \Gamma_3 \text{ curva } y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ da } (1,1) \text{ a } (0,0) \end{cases}$$

Quindi

$$\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_3$$

che calcolo separatamente.

• Parametrizzo Γ_1 con

$$\overrightarrow{r}_1(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + 0\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [0,\sqrt{2}]$$

quindi $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}_1(t)) \equiv 0$ su $[0,\sqrt{2}]$, da cui

$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_1 = 0$$

• Parametrizzo Γ_2 con

$$\overrightarrow{r}_2(t) = \sqrt{2}\cos(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \sqrt{2}\sin(t)\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

quindi

$$\begin{cases} \overrightarrow{r}'_2(t) = -\sqrt{2}\sin(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \sqrt{2}\cos(t)\,\overrightarrow{i}_2 \\ \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}_2(t)) = 2\cos(t)\sin(t)\,\overrightarrow{i}_1 + 2\cos(t)\sin(t)\,\overrightarrow{i}_2 \end{cases}$$

da cui

$$\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_2 = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \left(-\cos(t)\sin^2(t) + \cos^2(t)\sin(t)\right)\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\left[-\frac{\sin^3(t)}{3} - \frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3}$$

• Osservo che

$$\int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma_3 = -\int_{\tilde{\Gamma}_3} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\tilde{\Gamma}_3$$

con

$$\tilde{\Gamma}_3 : \ \overrightarrow{r}_3(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [0,1]$$

quindi

$$\begin{cases} \overrightarrow{r}'_3(t) = \overrightarrow{i}_1 + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\overrightarrow{i}_2 \\ \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}_3(t)) \cdot \overrightarrow{r}'_3(t) = t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\overrightarrow{i}_1 + \frac{\pi}{2}t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\overrightarrow{i}_2 \end{cases}$$

da cui, ponendo $z = \frac{\pi}{2}t$

$$\int_{\tilde{\Gamma}_3} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\tilde{\Gamma}_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}z\sin(z) + z\sin(z)\cos(z)\right)\mathrm{d}z = \ldots = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4}$$

• Allora

$$\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{11}{12}.$$

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i}_1 + x\,\overrightarrow{i}_2 + z^3\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro $(0,0,0)$ e raggio 2.

Svolgimento. Applichiamo il Teorema della divergenza

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{F} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \, .$$

Si calcola

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2,$$

e quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = 3 \iiint_V z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Per simmetria:

$$\iiint_V z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 8 \iiint_{V^+} z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \, .$$

ove $V^+ = V \cap \mathcal{O}_1$, e $\mathcal{O}_1 = \{x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\}$ è il primo ottante. Calcoliamo l'integrale esteso a V^+ passando alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases} \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to \rho^2 \sin(\phi) \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi$$

$$V^+ \;\; \to \;\; \tilde{V} = \left\{ (\rho, \vartheta, \phi) : \; 0 \leq \rho \leq 2, \; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = 24 \iiint_{V^+} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 24 \iiint_{\tilde{V}} \rho^4 \sin(\phi) \cos^2(\phi) \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi \\ &= 12\pi \int_0^2 \rho^4 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \cos^2(\phi) \sin(\phi) \, \mathrm{d}\phi \\ &= 12\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 \left[-\frac{\cos^3(\phi)}{3} \right]_0^{\pi/2} = 4\pi \frac{32}{5} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S$$

dove

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = x^2 \overrightarrow{i}_1 + \overrightarrow{i}_2 + z \overrightarrow{i}_3 \, ,$$

e $\mathcal{S}$ è il triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ ed $\overrightarrow{n}$ è la normale tale che $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{i}_1 > 0$.

Svolgimento. Applicando il Teorema di Stokes si ha

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$$

dove Γ un il cammino semplice chiuso che percorre i lati del triangolo in senso antiorario. Si noti che il verso è antiorario in accordo con il fatto che, percorrendo Γ, ci si deve lasciare la normale $\overrightarrow{n}$ a sinistra: in questo caso, la normale $\overrightarrow{n}$ è individuata dalla condizione $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{i}_1 > 0$, e, ragionando graficamente, si vede subito che il verso di percorrenza di Γ deve essere antiorario.

- Il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo. Il generico potenziale è:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + y + \frac{z^2}{2} + k\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Allora:

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma = 0\,.$$

e ciò è in accordo con il fatto che $\mathrm{rot}\overrightarrow{F} = \mathrm{rot}(\nabla\varphi) = \overrightarrow{0}$.

Esercizio 5. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i}_1 + y\,\overrightarrow{i}_2 + z^4\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie $\mathcal{S}$ del cilindro circolare di equazione $x^2+y^2 = 4$, delimitato dai piani $z=-1$ e $z=1$.

Svolgimento. Applichiamo il teorema della divergenza: altrimenti, siccome $\mathcal{S}$ è dato dall'unione di tre superficie $\mathcal{S}_1$ (la superficie laterale del cilindro), $\mathcal{S}_2$ (la base del cilindro sul piano $z=-1$), e $\mathcal{S}_3$ (il "coperchio" del cilindro sul piano $z=1$), per calcolare direttamente il flusso di $\overrightarrow{F}$ sarebbe necessario distinguere i tre contributi di $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_3$, calcolando i rispettivi versori normali.

Quindi

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}(\overrightarrow{F})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

con

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \in (-1,1),\ x^2+y^2 \le 4\right\}$$

che è, per esempio, un dominio normale rispetto all'asse z:

$$V \,:\, z \in (-1,1), \quad (x,y) \in D_z = \{x^2+y^2 \le 4\}.$$

Essendo

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{F})(x,y,z) = 2 + 4z^3,$$

si ha, integrando per strati

$$I = \iiint_V \left(2+4z^3\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{D_z}(2+4z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}(2+4z^3)\mathrm{area}(D_z)\,\mathrm{d}z = \ldots = 16\pi.$$
