Serie di Laurent

Esercizio 1

Sviluppare $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ in serie di Laurent nella corona circolare $0 < |z-1| < 2$.

Soluzione con il calcolo dei coefficienti. *Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

il primo termine rappresenta già una serie (di un solo termine) centrata in $z = 1$, per quel che riguarda il secondo termine, in $|z-1| < 2$ è analitico, per cui vale il semplice sviluppo in serie di Taylor

$$f_1(z) = \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

dove la derivata n-esima in $z = 1$ vale:

$$f_1^{(n)}(1) = \left.\frac{(-1)^n n!}{(z+1)^{n+1}}\right|_{z=1} = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

Per cui

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

e

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

Soluzione con la riconduzione a serie note. *Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha*

$$f(z) = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

dove i residui valgono

$$R_1 = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$$

si ha da subito la componente caratteristica

$$\frac{1/2}{z-1}$$

l'altra componente la si riconduce ad una serie di Taylor (punto iniziale $z = 1$) considerando che $|z-1| < 2$

$$-\frac{1/2}{z+1} = \frac{-1/2}{z-1+2} = \frac{-1/2}{2(1+\frac{z-1}{2})}$$

per $|z-1| < 2$ è la serie geometrica

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

quindi nella corona circolare $0 < |z-1|2 <$ si ha

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

Esercizio 2

Sviluppare $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ in serie di Laurent nel dominio $|z-1| > 2$.

Soluzione con il calcolo dei coefficienti. *In questo caso se il primo termine continua ad essere una serie centrata in $z = 1$, il secondo termine non è più analitico nel dominio semplicemente connesso ottenuto "chiudendo" la corona sferica $|z-1| > 2$, per cui si ricorre alla formula per le serie di Laurent:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-1)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}\,dz$$

essendo γ un punto interno al dominio in cui si calcola la serie ($|z-1| > 2$). Essendo in questo caso $f_(z) = 1/(z+1)$, si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^{n+1}}\,dz = (R(-1) + R(+1))$$

I residui si calcolano per la funzione $\frac{1}{(z+1)(z-1)^{n+1}}$. Il residuo in $z = -1$ corrisponde ad un polo semplice, e vale:

$$R(-1) = \left.\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\right|_{z=-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Il residuo in $z = 1$ corrisponde ad un polo di ordine $n+1$, per cui è nullo se $n+1 \le 0$ ovvero $n \le -1$. Diversamente, per $n \ge 0$, si ha, con la formula per i residui in poli di ordine k:

$$R(1) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 1}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{n!}\left.\frac{(-1)^n n!}{(z+1)^{n+1}}\right|_{z=1} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

Quindi in definitiva si ha:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

dato che $(-1)^{n+1}+(-1)^n = 0$. *Il risultato è:*

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

Soluzione con la riconduzione a serie note. *Ora si cerca la serie, di punto iniziale* $z=1$, *che per* $|z-1|>2$ *converga alla componente* $-\frac{1/2}{z+1}$

$$-\frac{1/2}{z+1} = \frac{-1/2}{z-1+2} = \frac{-1/2}{(z-1)(1+\frac{2}{z-1})}$$

per $|z-1|>2$ *è la serie geometrica*

$$-\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^n}$$

quindi per $|z-1|>2$ *si ha*

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}$$

Esercizio 3

Studiare i diversi sviluppi di Laurent per la funzione $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ di punto iniziale $z=0$.

Soluzione con il calcolo dei coefficienti. *Separando il due fratti semplici la funzione, si ha:*

$$f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} = f_1(z)+f_2(z) = \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{z+2}$$

Si distinguono i tre domini centrati in $z=0$ $|z|<1$, *in cui entrambe le funzioni sono analitiche,* $1<|z|<2$, *in cui solo* f_2 *è analitica nel dominio semplicemente* *connesso ottenuto chiudendo il buco della corona circolare considerata (ovvero* $|z| < 2$*), e* $|z| > 2$ *in cui nessuna delle due funzioni è analitica in tale dominio (in questo caso tutto il piano complesso). Nel primo caso sviluppo entrambe le funzioni in serie di Taylor con la classica formula, calcolando le derivate di* f_1 *e* f_2 *e valutandole in* $z = 0$*, ottenendo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{3} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$

Nel secondo caso ($1 < |z| < 2$*), il secondo termine,* f_2*, continua a poter essere sviluppato in serie di Taylor in quanto è analitico in* $|z| < 2$*, mentre* $f_1(z)$ *andrà sviluppata calcolando i coefficienti della serie di Laurent, ovvero valutando gli integrali:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{(z-1)z^{n+1}} \, dz = (R(1) + R(0))$$

Il residuo in $z = 1$ *corrisponde ad un polo semplice ed è*

$$R(1) = \left. \frac{1}{z^{n+1}} \right|_{z=1} = 1$$

mentre il secondo residuo corrisponde ad un polo di ordine n*, per cui sarà pari a 0 se* $n < 0$*, e invece se* $n \geq 0$ *è*

$$R(0) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{n!} \left. \frac{(-1)^n n!}{(z-1)^{n+1}} \right|_{z=0} = -1$$

per cui se $n \geq 0$ *i due residui si annullano tra loro, se* $n < 0$ *rimane solo* $R(1)$*. Dunque in questo caso*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$

Infine, nel terzo caso ($|z| > 2$*)m, nessuna delle due funzioni* f_1 *ed* f_2 *è analitica in* $|z| < 2$*, così entrambe le funzioni andranno sviluppate con le formule per i coefficienti di Laurent. La prima è già stata sviluppata precedentemente e nulla cambia. Per la seconda*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{(z+2)z^{n+1}} \, dz = (R(-2) + R(0))$$

Il residuo in $z = -2$ *corrisponde ad un polo semplice:*

$$R(-2) = \left. \frac{1}{z^{n+1}} \right|_{z=-2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Invece il residuo in $z = 0$ *corrisponde ad un polo di ordine* $n + 1$*, e sarà nullo per* $n < 0$*, mentre per* $n \geq 0$ *si otterrà:*

$$R(0) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z+2} = \frac{1}{n!} \left. \frac{(-1)^n n!}{(z+2)^{n+1}} \right|_{z=0} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

Per $n \geq 0$ i due residui si annullano tra di loro, mentre per $n < 0$ si ha solo il residuo $R(-2)$. Per cui si otterrà, in definitiva

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n$$

Soluzione con la riconduzione a serie note. *Il punto $z = 0$ è regolare, quindi esiste un intorno di $z_0 = 0$ in cui la funzione è sviluppabile in serie di Taylor.*
Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha

$$f(z) = \frac{R_1}{z+2} + \frac{R_2}{z-1}$$

dove i residui valgono

$$R_1 = \lim_{z \to -2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{3}$$

$$R_2 = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}$$

Le singolarità sono $z = -2$ e $z = 1$ per cui le regioni di olomorfismo saranno:

$$|z| < 1$$

in cui per la prima componente si ha

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

e per la seconda

$$\frac{2/3}{z-1} = -\frac{2/3}{1-z} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$1 < |z| < 2$$

in cui per la prima componente si ha ancora

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

mentre ora per la seconda si ha

$$\frac{2/3}{z-1} = \frac{2/3}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{2}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$|z| > 2$$

in cui ora per la prima componente si ha

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{z(1+\frac{2}{z})} = \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

mentre per la seconda si ha ancora

$$\frac{2/3}{z-1} = \frac{2/3}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{2}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Residui

Esercizio 4

Calcolare i residui di

1. $f(z) = \dfrac{z^2+3z-i}{z^2-1}$

   $z = -1$ e $z = 1$ sono poli semplici.

$$R(1) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+3z-i}{z+1} = \frac{4-i}{2}$$

$$R(-1) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2+3z-i}{z-1} = \frac{-2-i}{-2} = \frac{2+i}{2}$$

2. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$

   $z = 2$ è un polo semplice mentre $z = -1$ è un polo di ordine 2.

$$R(2) = \lim_{z\to 2}\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^2}{9}$$

$$R(-1) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{z-2} = \lim_{z\to -1}\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2} = \frac{-4e^{-1}}{9} = -\frac{4}{9e}$$

Soluzione di integrali tramite residui

Esercizio 5

Calcolare $\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z} dz$

Le singolarità $z = 0$ e $z = -1$ stanno dentro la circonferenza $|z| = 4$.

$$R(0) = 0$$

poiché la singolarità è eliminabile

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1$$

mentre

$$R(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{e^{-1} - 1}{-1} = 1 - 1/e$$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(1 - 1/e)$$

Esercizio 6

Calcolare $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz$

Le singolarità $z = 0$ e $z = i$ stanno dentro la circonferenza $|z - i| = 3/2$ mentre $z = -i$ sta fuori.

$$R(i) = \lim_{z\to i} \frac{e^{1/z^2}}{z + i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ei}$$

Il calcolo di $R(0)$ è più complesso perché $z = 0$ è una singolarità essenziale, quindi occorrerebbe considerare lo sviluppo di Laurent. Osservando peró che la funzione è pari, mancano i termini dispari, quindi anche $c_{-1} = 0 = R(0)$.
Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i(\frac{1}{2ei}) = \frac{\pi}{e}$$

Esercizio 7

Calcolare $\int_{|z|=2} 1/1 + z^4 dz$

Le singolarità $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ *con* $k = 0, 1, 2, 3$ *stanno tutte dentro la circonferenza* $|z| = 2$.
Calcolando i residui si trova che la loro somma è nulla, ma ciò si poteva capire osservando (geometricamente) che i contributi delle singolarità si elidono a vicenda.
Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z|=2} 1/1 + z^4 dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} R(e^{i(\pi+2k\pi)/4}) = 0$$

Esercizio 8

Calcolare $\int_0^{2\pi} 1/(3 + \cos x + 2\sin x)dx$

... cambio variabile $z = e^{ix}$ *i poli sono* $-5i/(2+i)$ *e* $-i/(2+i)$ *la soluzione è* $2\pi i R(-i/(2+i)) = \pi$