7.6 Esercizi svolti

Esercizio 7.1

Determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni :

a) $x(t) = u(t-1)e^{-2t} + u(t) - u(t+2)$;

b) $x(t) = e^{i3t}p_2(t+1)$;

c) $x(t) = p_2(2t-1)$;

d) $x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$.

e) $x(t) = e^{it}[u(t) - u(t-4)]$;

f) $x(t) = te^{-|t|}$;

g) $x(t) = t^2e^{-2t}u(t)$.

Soluzione

a) utilizzando la proprietà di linearità e la definizione di funzione porta si ha che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)] &= \mathcal{F}\left[u(t-1)e^{-2t} - u(t+2) + u(t)\right] \\ &= \mathcal{F}\left[u(t-1)e^{-2t}\right] - \mathcal{F}\left[u(t+2) - u(t)\right] \\ &= e^{-2}\mathcal{F}\left[u(t-1)e^{-2(t-1)}\right] - \mathcal{F}\left[p_2(t+1)\right].\end{aligned}$$

Utilizzando quindi la proprietà di traslazione si ottiene

$$\mathcal{F}[x(t)] = e^{-2-i\omega}\mathcal{F}\left[u(t)e^{-2t}\right] - e^{i\omega}\mathcal{F}\left[p_2(t)\right],$$

da cui segue

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{e^{-2-i\omega}}{2+i\omega} - \frac{2e^{i\omega}\sin\omega}{\omega},$$

grazie agli Esempi 7.14 e 7.15.

b) utilizzando la proprietà di traslazione si ha che

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[e^{i3t}p_2(t+1)] = e^{i\omega}\mathcal{F}[e^{i3(t-1)}p_2(t)] = e^{i\omega-3i}\mathcal{F}[e^{i3t}p_2(t)],$$

e quindi

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{2e^{i(\omega-3)}\sin(\omega-3)}{(\omega-3)},$$

grazie alla proprietà di modulazione.

c) Utilizzando le proprietà di riscalamento e traslazione si ha

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[p_2(t-1)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2e^{-i\omega/2}}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

d) Utilizzando la proprietà di traslazione e l'Esempio 7.14 si ha

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[p_T\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = e^{-i\omega\frac{T}{2}}\mathcal{F}\left[p_T(t)\right] = \frac{2e^{-i\omega\frac{T}{2}}}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

e) Utilizzando la definizione di funzione porta e la proprietà di modulazione si ha

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega) = \mathcal{F}[e^{ix}p_4(t-2)](\omega) = \mathcal{F}[p_4(t-2)](\omega-1),$$

da cui segue

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{2e^{-2i(\omega-1)}}{\omega-1}\sin(2(\omega-1)),$$

grazie alla proprietà di traslazione e all'Esempio 7.14.

f) Utilizzando la proprietà di derivazione rispetto a ω si ha

$$\mathcal{F}[x(t)] = i\frac{d}{d\omega}\left(\mathcal{F}[e^{-|t|}]\right) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) = \frac{-4i}{(1+\omega^2)^2}.$$

g) Utilizzando la proprietà di derivazione di ordine 2 rispetto a ω si ha

$$\mathcal{F}[x(t)] = i^2\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\mathcal{F}[e^{-2t}u(t)]\right) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{2+i\omega}\right) = \frac{2}{(2+i\omega)^3}.$$

Esercizio 7.2

Determinare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni :

a) $X(\omega) = \dfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}$;

b) $X(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2-a^2}$;

c) $X(\omega) = e^{-\omega^2}$;

d) $X(\omega) = we^{-\omega^2}$.

Soluzione

a) Grazie all'Esempio 7.35 si ha che

$$\mathcal{F}[q_T(t)] = \frac{8\sin^2(\omega T/4)}{T\omega^2},$$

da cui segue
$$\mathcal{F}[q_4(t)] = 2\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2},$$
avendo posto $T = 4$. Si conclude quindi che
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\right] = \frac{q_4(t)}{2},$$
grazie alla propretà di linearità.

b) Scomponendo in fratti semplici si ha che
$$\frac{1}{\omega^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{\omega - a} - \frac{1}{\omega + a}\right).$$
Utilizzando l'Esempio 7.43 si ha inoltre che
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -i\pi \ \mathrm{sign}(\omega),$$
e quindi
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t+a}\right] = -i\pi \ \mathrm{sign}(\omega)e^{i\omega a},$$
grazie alla proprietà di traslazione. Trasformando ambo i membri della precedente equazione e utilizzando la proprietà di simmetria si ha
$$-i\pi\mathcal{F}\left[\ \mathrm{sign}(\omega)e^{i\omega a}\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{t+a}\right]\right] = 2\pi\frac{1}{a-t},$$
e quindi
$$\mathcal{F}\left[\ \mathrm{sign}(\omega)e^{i\omega a}\right] = \frac{2i}{a-t},$$
da cui segue
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega - a}\right] = -\frac{\mathrm{sign}(t)e^{ita}}{2i},$$
Si conclude quindi che
$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 - a^2}\right] &= \frac{1}{2a}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega - a}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega + a}\right]\right) \\ &= -\frac{1}{2a}\left(\frac{\mathrm{sign}(t)e^{ita}}{2i} - \frac{\mathrm{sign}(t)e^{-ita}}{2i}\right) = -\frac{\mathrm{sign}(t)\sin(at)}{2a}.\end{aligned}$$

c) Grazie all'Esempio 7.42 si ha che
$$\mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/(4a)},$$
da cui segue
$$\mathcal{F}[e^{-t^2/4}] = 2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2}, \tag{7.10}$$

avendo posto $a = \frac{1}{4}$. Si conclude quindi che

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4},$$

grazie alla proprietà di linearità.

d) Osservando che

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2/4}\right) = -\frac{t}{2} e^{-t^2/4}$$

e utilizzando la proprietà di derivazione rispetto a t si ha

$$\mathcal{F}\left[-\frac{t}{2} e^{-t^2/4}\right] = i\omega \mathcal{F}\left[e^{-t^2/4}\right] = 2\sqrt{\pi} i\omega e^{-\omega^2},$$

grazie a (7.10). Si conclude quindi che

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\omega e^{-\omega^2}\right] = i\frac{t}{4\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4},$$

grazie alla proprietà di linearità.

Esercizio 7.3

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = p_T(t)\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$.

Soluzione

Grazie alle formule di Eulero, alla proprietà di modulazione e all'Esempio 7.14 si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p_T(t)\cos(at)] &= \mathcal{F}\left[p_T(t)\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left[p_T(t)e^{iat}\right] + \mathcal{F}\left[p_T(t)e^{-iat}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[p_T(t)](\omega - a) + \mathcal{F}[p_T(t)](\omega + a)\right) \\ &= \frac{\sin((\omega - a)T/2)}{(\omega - a)} + \frac{\sin((\omega + a)T/2)}{(\omega + a)}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.4

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = \dfrac{\sin^2(at)}{t^2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Soluzione

Come dimostrato nell'Esempio 7.35, si ha che

$$\mathcal{F}[q_T(t)] = \frac{8\sin^2(wT/4)}{T\omega^2}.$$

Per la proprietà di simmetria, si ha

$$\mathcal{F}\left[\frac{8\sin^2(wT/4)}{T\omega^2}\right] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[q_T(t)]] = 2\pi q_T(-t) = 2\pi q_T(t),$$

da cui segue

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(wT/4)}{\omega^2}\right] = \frac{\pi T}{4} q_T(t).$$

Se $a > 0$, si pone $T = 4a$ e si ottiene

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right] = a\pi p_{4a}(\omega), \tag{7.11}$$

utilizzando come sempre la variabile ω per la trasformata di Fourier. Se invece $a < 0$ si ha $a = -|a|$ e quindi

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(-|a|t)}{t^2}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(|a|t)}{t^2}\right] = |a|\pi p_{4a}(\omega),$$

grazie a (7.11) e alla parità della funzione $\sin^2 t$. Si conclude quindi che

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right] = |a|\pi p_{4a}(\omega),$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.5

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = p_T(t+T) + p_T(t-T)$.
Grafico

Soluzione

Utilizzando la proprietà di traslazione e l'Esempio 7.14, si ha che

$$\mathcal{F}[p_T(t+T)] = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{i\omega T} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[p_T(t-T)] = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-i\omega T},$$

da cui segue

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}\right) = \frac{4}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cos(\omega T).$$

Esercizio 7.6

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = q_T(t+T) + q_T(t-T)$.
Grafico

Soluzione

Utilizzando la proprietà di traslazione e l'Esempio 7.35, si ha che

$$\mathcal{F}[q_T(t+T)] = \frac{8}{T\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)e^{i\omega T} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[q_T(t-T)] = \frac{8}{T\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)e^{-i\omega T},$$

da cui segue

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{8}{T\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)\left(e^{i\omega T}+e^{-i\omega T}\right) = \frac{16}{T\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)\cos\left(\omega T\right).$$

Esercizio 7.7

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = \dfrac{1}{t^2-a^2}$, $(a \in I\!R,\, a \neq 0)$.

Soluzione

Grazie alla decomposizione in fratti semplice si ha che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2-a^2}\right] &= \frac{1}{2a}\left(\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-a}\right]-\mathcal{F}\left[\frac{1}{t+a}\right]\right) = \frac{1}{2a}\left(\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right]e^{-ia\omega}-\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right]e^{ia\omega}\right)\\
&= \frac{i}{a}\left(\frac{e^{-ia\omega}-e^{ia\omega}}{2i}\right)\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{i}{a}\sin(a\omega)\ i\pi\ \mathrm{sign}(\omega)\\
&= -\frac{\pi}{a}\ \mathrm{sign}(\omega)\sin(a\omega),
\end{aligned}$$

per la proprietà di traslazione e l'Esempio 7.43.

Esercizio 7.8

Usando la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-a|t|}$ e l'identità di Parseval, calcolare

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx,$$

per ogni $a \in I\!R$, $a \neq 0$.

Soluzione

Come dimostrato nell'Esempio 7.16, per ogni $a > 0$,

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{\omega^2+a^2}.$$

Applicando l'identità di Parseval con $x(t) = e^{-a|t|}$ e $X(\omega) = \dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-a|t|}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2a}{\omega^2+a^2}\right|^2 d\omega,$$

e quindi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|t|}dt = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega,$$
da cui segue
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{2a^2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega,$$
essendo entrambe le funzioni integrande pari. Si conclude quindi che
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{\pi}{2a^2}\int_{0}^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{\pi}{2a^2}\left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Esercizio 7.9

Utilizzando l'uguaglianza di Plancherel dimostrare che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}dx = \frac{1}{8\pi}.$$

Soluzione

Utilizzando la formula di duplicazione $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ottiene
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\cos x\sin x}{x}\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)dx\\ &= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{x}\sin x\right)\left(\frac{2}{x}\sin(2x)\right)dx.\end{aligned}$$
Si utilizza quindi l'uguaglianza di Plancherel con $x(t) = p_2(t)$ e $y(t) = p_4(t)$, e quindi $X(\omega) = \dfrac{2}{\omega}\sin(\omega)$ e $Y(\omega) = \dfrac{2}{\omega}\sin(2\omega)$, ottenendo
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{\omega}\sin\omega\right)\left(\frac{2}{\omega}\sin(2\omega)\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(t)p_4(t)dt = \frac{1}{\pi},$$
da cui segue come desiderato che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}dx = \frac{1}{8\pi}.$$

Esercizio 7.10

Verificare che per ogni $a \in I\!R$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt = |a|\pi.$$

Soluzione

Per l'Esercizio 7.6 si ha che per ogni $a \in I\!R$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right](\omega) = |a|\pi q_{4a}(\omega).$$

Ponendo $\omega = 0$ nella precedente equazione si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt = |a|\pi q_{4a}(0) = |a|\pi.$$

Esercizio 7.11

Utilizzando le osservazioni fatte nell'Esempio 7.42 verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx = 1,$$

per ogni $m \in I\!R$ e $\sigma > 0$.

Soluzione

Per l'Esempio 7.42 si ha

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)},$$

che, per $\omega = 0$ e $a = 1/2$, implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}\right](0) = \sqrt{2\pi}. \tag{7.12}$$

Utilizzando il cambio di variabile $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ e l'equazione (7.12) si ha quindi come desiderato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2/2} dt = 1.$$

Esercizio 7.12

Utilizzando la trasformata di Fourier determinare una funzione $y(t)$ soluzione dell'equazione integrale

$$y(t) = r(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)r(t-x)dx$$

dove $r(t) = e^{-3|t|}$.

Soluzione

Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione integrale si ottiene per linearità

$$\mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[e^{-3|t|}] + \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)r(t-x)dx\right],$$

da cui segue

$$\mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[e^{-3|t|}] + \mathcal{F}[(y * r)(t)] = \frac{6}{9+\omega^2} + \mathcal{F}[y(t)]\mathcal{F}[r(t)] = \frac{6}{9+\omega^2} + \mathcal{F}[y(t)]\frac{6}{9+\omega^2},$$

per la proprietà di convoluzione e l'Esempio 7.16. Si conclude ricavando

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{6}{3+\omega^2},$$

e quindi

$$y(t) = \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}|t|}.$$

7.7 Esercizi proposti

1. Determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni :

   (1) $x(t) = u(t+2) - u(t) - u(t+2)e^{-t}$; $\left[e^{2i\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - \frac{e^2}{1+i\omega}\right)\right]$

   (2) $x(t) = e^{it}p_2(3t+1)$; $\left[\frac{2e^{i(\omega-1)}\sin(3(\omega-1))}{\omega-1}\right]$

   (3) $x(t) = u(t+2)e^{-t(1+i)}$; $\left[\frac{2e^{-i\omega}\sin(\omega/2)}{\omega}\right]$

   (4) $x(t) = p_T\left(t+\frac{T}{2}\right)$. $\left[\frac{2e^{-i\omega T/2}\sin(\omega T/2)}{\omega}\right]$

   (5) $x(t) = e^{-i2t}[u(t+1) - u(t-2)]$; $\left[\frac{2e^{-2i(\omega-1)}\sin(2(\omega-1))}{\omega-1}\right]$

   (6) $x(t) = t^2e^{-2|t|}$; $\left[8\frac{4-3\omega^2}{(4+\omega^2)^3}\right]$

(7) $x(t) = te^{-t}u(t)$. $\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}\right]$

(8) $x(t) = e^{at}u(-t)$, $(a \in I\!R, a > 0)$. $\left[\dfrac{1}{a - i\omega}\right]$

(9) $x(t) = \dfrac{1}{t+a}$, $(a \in I\!R)$. $[-i\pi\ \mathrm{sign}(\omega)e^{ia\omega}]$

2. Determinare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni :

(1) $X(\omega) = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$; $\left[\dfrac{p_2(t)}{2}\right]$

(2) $X(\omega) = p_T(\omega)$; $\left[\dfrac{1}{\pi t}\sin\left(\dfrac{Tt}{2}\right)\right]$

(3) $X(\omega) = \dfrac{\omega}{(\omega^2+1)^2}$; $\left[\dfrac{ite^{-|t|}}{4}\right]$

(4) $X(\omega) = \dfrac{\omega}{a^2-\omega^2}$; $\left[\dfrac{\cos(at)\ \mathrm{sign}(t)}{2i}\right]$

3. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t) = p_T(t)e^{iat}$, $(a \in I\!R)$.

$$\left[\frac{2}{(\omega-a)}\sin\left(\frac{(\omega-a)T}{2}\right)\right]$$

4. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t) = \dfrac{1}{(t-a)(t-b)}$, $(a,b \in I\!R,\ a \neq b)$.

$$\left[\frac{\pi\ \mathrm{sign}(\omega)}{i(a-b)}\left(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}\right)\right]$$

5. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+4}$.

$$\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\omega|+i\omega}\right]$$

6. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$.

$$[-i\pi\ \mathrm{sign}(\omega)\cos\omega]$$

7. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2|a|}$$

per ogni $a \in I\!R$.

8. Utilizzando l'uguaglianza di Parseval dimostrare che
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

9. Utilizzando l'uguaglianza di Plancherel dimostrare che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(a^2 + x^2)} dx = \frac{\pi}{a^2}\left(1 - e^{-a}\right)$$
per ogni $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

10. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}, a > 0$, si ha
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi.$$