

ESERCIZI SUL CALCOLO DEI RESIDUI

Esercizio N.1

Si calcoli il residuo in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{2}{z(z-i)}$$

- **Soluzione**

$z = 0$ è un polo semplice per la funzione $f(z)$, quindi il residuo si ottiene come:

$$\operatorname{Res}(f(z))|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} (z f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{(z-i)} = 2i \quad .$$

Esercizio N.2

Si calcoli il residuo in ogni singolarità isolata della funzione

$$f(z) = \frac{z-4}{(z+i)(z-i)^3}$$

- **Soluzione**

La funzione ha due singolarità isolate: in $z = -i$ ha un polo semplice ed in $z = i$ ha un polo triplo.

Il residuo in $z = -i$ è:

$$\operatorname{Res} f(z)|_{-i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{z-4}{(z+i)(z-i)^3} = \frac{4i-1}{8}$$

Il residuo in $z = i$ invece è:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z)|_i &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-i)^3 \frac{z-4}{(z+i)(z-i)^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} -2 \frac{4+i}{(z+i)^3} = -i \frac{4+i}{4} \end{aligned}$$

Esercizio N.3

Si calcoli il residuo in ogni singolarità isolata della funzione

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2 (z - \frac{3}{2})^2} \quad .$$

- **Soluzione**

La funzione ha due singolarità isolate: in $z = 0$ ha un polo *semplice* (poichè $\sin \pi z \sim \pi z$ per $z \rightarrow 0$) ed in $z = 3/2$ ha un polo doppio.

Il residuo in $z = 0$ è:

$$\Re s f(z)|_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sin \pi z}{z^2 (z - \frac{3}{2})^2} = \pi \frac{4}{9}$$

Il residuo in $z = 3/2$ invece è:

$$\begin{aligned} \Re s f(z)|_{3/2} &= \lim_{z \rightarrow 3/2} \frac{d}{dz} \left[\left(z - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{\sin \pi z}{z^2 (z - \frac{3}{2})^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 3/2} \frac{z \pi \cos \pi z - 2 \sin \pi z}{z^3} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$