Esercizio 1370
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la continuità e la differenziabilità della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^3}-1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

calcolando poi il gradiente nel punto $(0,0)$.

***

Soluzione
La funzione è manifestamente continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Dobbiamo quindi esaminare il suo comportamento in $(0,0)$. Abbiamo:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \frac{0}{0}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata passiamo a coordinate polari, attraverso le note formule $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, per cui il limite diventa:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{r^3\cos^3\varphi}-1}{r^2} = \frac{0}{0}$$

Possiamo ritenere φ costante ed applicare quindi la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{r^3\cos^3\varphi}-1}{r^2} \stackrel{H}{=} \frac{3}{2}\lim_{r\to 0^+} r\cos^3\varphi e^{r^3\cos^3\varphi} = 0, \ \forall\varphi$$

Quindi:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

da cui la continuità in $(0,0)$.
Il gradiente nel punto $(0,0)$ è dato da:

$$\nabla f|_{(0,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} \mathbf{j}$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{h^3}-1}{h^3} = \frac{0}{0} \\
\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} e^{h^3} &= 1 \\
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0
\end{aligned}
$$

Da ciò segue:

$$
\nabla f|_{(0,0)} = \mathbf{i}
$$

La funzione è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se è ivi di classe C^1. In maniera equivalente, deve essere:

$$
\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - df}{\rho} = 0
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f(h,k) - f(0,0) = \frac{e^{h^3}-1}{h^2+k^2} \\
df &= f_x(0,0)\,h + f_y(0,0)\,k = h \\
\rho &= \sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}
$$

Il limite precedente diventa:

$$
\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{e^{h^3}-1-h(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}}
$$

Passando nuovamente a coordinate polari, che ora indichiamo con ρ,φ (poichè abbiamo indicato con ρ il raggio vettore $\sqrt{h^2+k^2}$):

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{e^{h^3}-1-h(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho^3\cos^3\varphi}-1-\rho^3\cos^2\varphi-\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^3} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\overset{H}{=} \lim_{\rho\to 0}\left(e^{\rho^3\cos^3\varphi}-\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi\right)
\end{aligned}
$$

Tale valore dipende dall'angolo φ che definisce la direzione con cui ci avviciniamo all'origine, quindi il limite non esiste. Si conclude che la funzione non è differenziabile nell'origine.