Prova Teoria dei Segnali e Comunicazioni Elettriche — A.A. 2013/2014

laurea triennale

Cognome e Nome ______________________________ Matricola ______________

Esercizi

1. Calcolare l'area e l'energia del segnale a tempo discreto $x(kT) = (-1)^k e^{-2|k|T}$, $kT \in Z(T)$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t + (k + 0.5)T}{T}\right).$$

3. Si consideri un processo aletorio stazionario gaussiano a tempo discreto $a(kT)$ a simboli indipendenti con media nulla e varianza unitaria. Il processo viene filtrato con un filtro con funzione di trasferimento $H_z(z) = T/(1 - 0.1\, z^{-1})$. Calcolare la potenza del processo di uscita.

4. Si consideri un sistema di trasmissione in quadratura. I segnali di ingresso $x_1(t)$ e $x_2(t)$ nei canali in fase (canale 1) e in quadratura (canale 2) sono modellati come processi aleatori stazionari a media nulla con densità spettrale $R_x(f) = R_0 \operatorname{triangle}(fT)$. Si suppongano i filtri di trasmissione e ricezione ideali, con guadagno $A_T = A_R = A$, e un mezzo trasmissivo che determina una attenuazione A_M, con $A^2 A_M = 2$. Si supponga che le portanti in ricezione abbia un errore di fase $\Delta\Phi$ rispetto alle portanti in trasmissione. In ciascuno dei due canali, ad esempio il canale 1, si identifichi il segnale utile $s_u(t)$ come la componente del segnale ricevuto proporzionale al segnale trasmesso $x_1(t)$, e la distorsione $d(t)$ come la componente del segnale ricevuto proporzionale al segnale $x_2(t)$. Sia inoltre $n_r(t)$ la componente del segnale ricevuto dovuta al rumore. Calcolare il rapporto segnale rumore complessivo
$$\Lambda = \frac{E[s_u^2(t)]}{E[d^2(t)] + E[n_r^2(t)]}.$$

5. In un sistema PAM con simboli $a(kT) \in \{0, \pm 1\}$, P$[a(kT) = 1]$=P$[a(kT) = 1]$, P$[a(kT) = 0]$=1/2, l'impulso in trasmissione $g(t)$ e la risposta impulsiva dell'amplificatore di ricezione $h(t)$ hanno, rispettivamente, un andamento in frequenza a radice di coseno rialzato, con fattore di roll-off pari a $\alpha = 0.2$, mentre il mezzo trasmissivo introduce un'attenuazione costante A_M. Sia $G(0) = V_0 T$ e $H(0) = A_R$. Anche se i simboli non sono equiprobabili, l'elemento di decisione è a soglia con soglia a metà dei simboli ricevuti in assenza di rumore. Il rumore all'ingresso dell'amplificatore di ricezione è gaussiano, bianco, con densità spettrale R_0. Calcolare la probabilità di errore del sistema.

(1)

area $x(kT) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2|k|T} =$

$= T \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-2kT} + T \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{-k} e^{-2kT} - T$

$= T \left[\frac{1}{1+e^{-2T}} + \frac{1}{1-e^{-2T}} - 1 \right] = \frac{2T}{1+e^{-2T}} - T$

energia $x(kT) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (-1)^k e^{-2|k|T} \right|^2$

$= T \left(2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4kT} - 1 \right) = \frac{2T}{1-e^{-4T}} - T$

(3)

$R_a(f) = \sigma_a^2 T + m_a^2 \delta_{\frac{1}{T}}(f)$

$\sigma_a^2 = 1, \quad m_a = 0$

$R_a(f) = T \qquad H(f) = \frac{T}{1 - 0.1 e^{-j2\pi fT}}$

$h(kT) = (0.1)^k 1_0(kT)$

$R_y(f) = R_a(f) \, |H(f)|^2$

$M_y = \int_0^{\frac{1}{T}} R_a(f) \, |H(f)|^2 df \underset{\text{Parseval}}{=} T \cdot T \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (0.1)^{2k}$

$= \frac{T^2}{1 - 0.01}$

(2)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t+(k+0.5)T}{T}\right)$$

$$= T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} \frac{1}{T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t-kT+0.5T}{T}\right)$$

$$\underset{\mathbb{Z}(T)}{2^{-|k|} = a(kT)} \longrightarrow \boxed{\uparrow g(t)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{x(t)} \qquad g(t) = \frac{1}{T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t+0.5T}{T}\right)$$

$$X(f) = A(f) \cdot G(f)$$

$$A(f) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} e^{-j2\pi fkT} = T\left[\frac{1}{1-0.5e^{-j2\pi fT}} + \frac{1}{1-0.5e^{+j2\pi fT}} - 1\right]$$

$$G(f) = \text{triangle}(fT)\, e^{+j2\pi 0.5T \cdot f}$$

(4) Nelle ipotesi indicate, il segnale ricevuto sul canale 1, prima della moltiplicazione per la portante in ricezione è

$$x_r(t) = \left[x_1(t)\cos(2\pi f_0 t+\varphi) + x_2(t)\sin(2\pi f_0 t+\varphi)\right] \cdot A^2 A_M$$

Moltiplicando per $\cos(2\pi f_0 t+\varphi+\Delta\phi)$ otteniamo

$$x'_r(t) = x_1(t)\cos\Delta\phi + x_1(t)\cos(2\pi f_0 2 t+\varphi+\Delta\phi) + x_2(t)\sin(-\Delta\phi) + x_2(t)\sin(2\pi 2 f_0 t+\varphi+\Delta\phi)$$

In uscita del filtro passa-basso si ottiene

$$\hat{x}(t) = x_1(t)\cos\Delta\phi - x_2(t)\sin(\Delta\phi) = s_u(t)+d(t)$$

Potenza del rumore come nella DSB: $n_M = A_R^2 \cdot B \cdot N_0$ con N_0 densità spettrale del rumore, $B=\frac{1}{T}$ la banda del segnale (vedi $R_x(f)$) e $A_R^2 = A^2$.

$$E[s_u^2(t)] = E[x_1^2(t)\cos^2\Delta\phi] = M_{x_1}\cos^2\Delta\phi = \frac{R_0}{T}\cdot\cos^2\Delta\phi$$

$$E[d^2(t)] = M_{x_2}\sin^2\Delta\phi = \frac{R_0}{T}\sin^2\Delta\phi$$

$$\Lambda = \frac{\frac{R_0}{T}\cos^2\Delta\phi}{\frac{R_0}{T}\sin^2\Delta\phi + \frac{A^2 N_0}{T}}$$

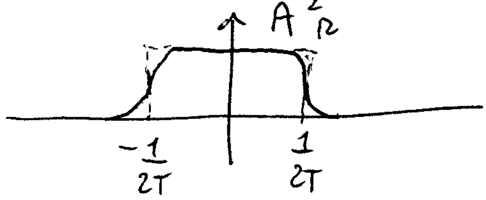
(5)

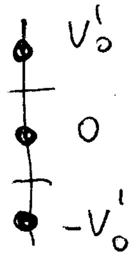
$C(f) = G(f)\cdot L(f)\cdot H(f)$ è a coseno rialzato con ampiezza $C(0) = V_0 T\cdot A_M\cdot A_R$. Quindi $c(t)$ è di Nyquist, con $c(t)\big|_{t=0} = V_0' = $ area $C(f)$

$= V_0\cdot A_M\cdot A_R$

$$\sigma_n^2 = R_0\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df = \frac{R_0\cdot A_R^2}{T}$$

In quanto $|H(f)|^2$ è un coseno rialzato con ampiezza A_R^2 e area $\frac{A_R^2}{T}$





$P_e = 1 - P_c$

$$P_c = P\left[a_k=1,\ a_k V_0' + n_k > +\frac{V_0'}{2}\right] + P\left[a_k=0,\ |a_k V_0' + n_k| < \frac{V_0'}{2}\right]$$
$$+\ P\left[a_k=-1,\ a_k V_0' + n_k < -\frac{V_0'}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{4}Q\left(-\frac{V_0'}{2\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{V_0'}{2\sigma_n}\right) - \Phi\left(-\frac{V_0'}{2\sigma_n}\right)\right) + \frac{1}{4}\Phi\left(\frac{V_0'}{2\sigma_n}\right)$$