Cenni alla Modulazione di Ampiezza (AM)

Nella modulazione di ampiezza, si trasmette il segnale

$$v(t) = (V_0 + k_I x(t)) \cos(2\pi f_0 t),$$

dove $x(t)$ è il segnale di informazione, con banda B, e f_0 è la frequenza della portante, $f_0 \gg B$. Nella modulazione di ampiezza, V_0 e k_I vengono scelti in modo che

$$V_0 + k_I x(t) \geq 0. \tag{1}$$

Se l'ampiezza di $x(t)$ non è limitata, si richiede che (1) sia soddisfatta in termini probabilistici,

$$\mathrm{P}[V_0 + k_I x(t) \geq 0] = 1 - \epsilon, \tag{2}$$

con ϵ scelto opportunamente. In altre parole, definito con $-x_M$ il valore minimo di $x(t)$ (o in modo tale che $\mathrm{P}[x(t) \geq -x_M]$ con alta probabilità), la (1) è soddisfatta se

$$m_I = \frac{k_I x_M}{V_0} \leq 1.$$

Il parametro m_I viene detto *indice di modulazione* e la condizione $m_I \leq 1$ viene detta *di corretta modulazione*. In sostanza, la modulazione di ampiezza (AM) si configura come una modulazione DSB, in cui viene trasmessa anche la portante (per la AM, si usa infatti anche la denominazione DSB-TC (DSB Transmitted Carrier)).

Come vedremo, la condizione (1) permette di progettare un ricevitore che non ha bisogno della portante, o, come si dice, *incoerente*. D'altra parte, questa possibilità, che consente che il ricevitore sia molto economico, si paga con il fatto che occorre sprecare potenza per la trasmissione della portante stessa.

Al ricevitore è sufficiente calcolare, mediante un raddrizzatore, il modulo di $v(t)$, ottenendo, nelle ipotesi suddette,

$$v_R(t) = (V_0 + k_I x(t)) \, |\cos(2\pi f_0 t)|.$$

La funzione $|\cos(2\pi f_0 t)|$ è una funzione periodica di periodo $1/(2f_0)$ e quindi ha uno sviluppo di Fourier del tipo

$$\mathcal{F}\{|\cos(2\pi f_0 t)|\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta_R(f - 2kf_0), \quad c_0 = \frac{2}{\pi}.$$

La trasformata di Fourier di $v_R(t)$, consiste dunque nella somma di infinite repliche della trasformata di $(V_0 + k_I x(t))$, traslate nei multipli di $2f_0$. Ciascuno di questi termini ha estensione spettrale $[2kf_0 - B, 2kf_0 + B]$, per cui, con un semplice filtro passa-basso con risposta in frequenza unitaria nella banda B, si può estrarre la componente corrispondente al termine $c_0(V_0 + k_I x(t))$, annullando le altre repliche. Eliminando la componente continua, si ottiene infine un segnale proporzionale al segnale di informazione. A causa della potenza utilizzata per la trasmissione della portante, si può far vedere, con un'analisi dettagliata degli effetti del rumore, che la AM ha una efficienza γ minore di uno, ovvero che $\Lambda = \gamma\Lambda_c < \Lambda_c$. In particolare, l'espressione approssimata del rapporto segnale/rumore complessivo, nell'ipotesi di *piccolo rumore,* risulta

$$\Lambda = \Lambda_c \frac{m_I^2 k_f^2}{1 + m_I^2 k_f^2}.$$

Nella relazione precedente, Λ_c è il rapporto segnale/rumore convenzionale prima dell'amplificatore di ricezione, pari al rapporto fra la potenza del segnale ricevuto e la potenza del rumore convenzionale sulla banda del segnale, m_I è l'indice di modulazione; inoltre, $k_f^2 = M_x/x_M^2$ è il quadrato del *fattore di forma*, in cui M_x è la potenza del segnale di informazione $x(t)$ e $|x(t)| \leq x_M$ (se $x(t)$ non è ad ampiezza limitata, si definisce x_M ponendo $\mathrm{P}[|x(t)| \leq x_M] \simeq 1$.) Nei casi di interesse, $k_f < 1$.

Cenni alla Modulazione di Argomento

Nella modulazione di argomento, viene trasmesso il segnale

$$v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t) + \varphi)$$

dove $V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ è la portante e $\alpha(t)$ è una trasformazione lineare del segnale di informazione $x(t)$. I casi fondamentali sono la *modulazione di fase*, in cui

$$\alpha(t) = K_\Phi x(t)$$

e la *modulazione di frequenza*, in cui

$$\alpha(t) = 2\pi K_F \int_{t_0}^{t} x(u) du.$$

In ogni caso, $\alpha(t)$ rappresenta la *deviazione di fase* del segnale, ovvero

$$\Delta\varphi_v(t) = \alpha(t),$$

mentre la corrispondente deviazione di frequenza risulta

$$\Delta f_v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t),$$

per cui, nella modulazione di frequenza, si ha

$$\Delta f_v(t) = K_F x(t).$$

La deviazione di frequenza risulta dunque in questo caso proporzionale al segnale di informazione.

Si noti che, nell'ipotesi in cui φ sia una v.a. uniforme in $[0, 2\pi)$ indipendente da $\alpha(t)$, con $\alpha(t)$ processo stazionario con densità di probabilità del primo ordine $f_\alpha(a)$, la potenza statistica di $v(t)$ risulta

$$M_v = E[v^2(t)] = \frac{V_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} E[\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\alpha(t) + 2\varphi)] = \frac{V_0^2}{2},$$

dato che si ha

$$
\begin{aligned}
&E[\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\alpha(t) + 2\varphi)] \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi 2 f_0 t + 2a + 2b)\, db \right\} f_\alpha(a)\, da = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Una analisi qualitativa delle caratteristiche di un segnale modulato in argomento, si può ottenere considerando il caso di una deviazione di fase sinusoidale

$$\alpha(t) = \Delta\Phi \sin 2\pi f_m t,$$

con $f_m \ll f_0$. Si noti che, se il segnale di informazione è sinusoidale, la deviazione di fase risulta ancora un segnale sinusoidale sia nella modulazione di fase che di frequenza.

Per l'analisi in frequenza di $v(t)$, si considera l'identità

$$e^{j\Delta\Phi \sin 2\pi f_m t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\Delta\Phi) e^{j2\pi k f_m t},$$

dove $J_k(t)$ è la *funzione di Bessel di prima specie* di ordine k (si veda, ad esempio, la documentazione Matlab a proposito di questa famiglia di funzioni.)

Possiamo dunque scrivere

$$
\begin{aligned}
v(t) &= V_0 \mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_0 t + \varphi} e^{j\Delta\Phi \sin 2\pi f_m t} \right] \\
&= V_0 \mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_0 t + \varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\Delta\Phi) e^{j2\pi k f_m t} \right] \\
&= V_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\Delta\Phi) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi k f_m t + \varphi).
\end{aligned}
$$

Si tratta di una somma di sinusoidi di frequenza $f_0, f_0 \pm f_m, f_0 \pm 2f_m, \ldots$. In generale, dunque, la banda del segnale modulato in frequenza è infinita. D'altra parte, le funzioni di Bessel, per un dato valore di $\Delta\Phi$, tendono a zero all'aumentare di $|k|$, dato che si ha, per ogni valore di $\Delta\Phi$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k^2(\Delta\Phi) = 1.$$

L'ampiezza delle $J_k(\Delta\Phi)$ risulta dunque ad un certo punto trascurabile. Si possono pertanto considerare, nella sommatoria, le sole sinusoidi che contribuiscono, ad esempio, al 90% dell'energia totale del segnale. Il valore di k corrispondente determina una banda convenzionale B_v per il segnale modulato, per cui la trasformata di Fourier di $v(t)$ presenta righe di ampiezza non trascurabile nella banda di frequenze positive $(f_0 - B_v/2, f_0 + B_v/2)$. Usando questo criterio, con una deviazione di fase sinusoidale di frequenza f_m, si può attribuire al segnale modulato una banda all'incirca pari a $B_v = 2f_m(1 + \Delta\Phi)$.

In un sistema di modulazione di frequenza con $\Delta f_v(t) = \Delta F \cos(2\pi f_m t)$, la deviazione di fase risulta sinusoidale con massima deviazione di fase $\Delta\Phi = \Delta F/f_m$, per cui la banda del segnale modulato risulta all'incirca $B_v = 2(f_m + \Delta F)$.

Sulla bese delle considerazioni precedenti, la *formula di Carson* attribuisce ad un segnale modulato in argomento con una deviazione di fase $\alpha(t)$ con banda B e massima deviazione di fase $\Delta\Phi = \max|\alpha(t)|$ una larghezza di banda approssimativa pari a

$$B_v = 2B(1 + \Delta\Phi).$$

Analogamente, ad un segnale modulato in frequenza con una deviazione di frequenza $\Delta f_v(t)$ con banda B e massima deviazione di frequenza $\Delta F = \max|\Delta f_v(t)|$, si attribuisce una larghezza di banda approssimativa pari a

$$B_v = 2(B + \Delta F).$$

La demodulazione di un segnale modulato in frequenza può essere effettuata mediante il cosiddetto *discriminatore di frequenza*, che non necessita della portante. Esso è costituito dalla cascata di un derivatore, seguito da un demodulatore di ampiezza. Infatti, se pensiamo di ricevere un segnale della forma di $v(t)$, si ottiene, tramite derivazione

$$\frac{d}{dt}v(t) = -V_0(2\pi f_0 + 2\pi K_F x(t)) \sin\left(2\pi f_0 t + 2\pi K_F \int_{t_0}^{t} x(u)du + \varphi\right).$$

La derivata ha approssimativamente la forma di un segnale modulato in ampiezza, visto che $2\pi f_0 + 2\pi K_F x(t) > 0$ se f_0 è sufficientemente grande, mentre

$$\sin\left(2\pi f_0 t + 2\pi K_F \int_{t_0}^{t} x(u)du + \varphi\right)$$

ha il ruolo della portante.

Si può far vedere, con un'analisi dettagliata degli effetti del rumore, che la FM può in generale avere una efficienza γ maggiore di uno, ovvero che $\Lambda = \gamma\Lambda_c > \Lambda_c$. In particolare, l'espressione approssimata del rapporto segnale/rumore complessivo, nell'ipotesi di *piccolo rumore,* risulta

$$\Lambda = 3k_f^2 \left(\frac{\Delta F}{B}\right)^2 \Lambda_c.$$

Nella relazione precedente, Λ_c è il rapporto segnale/rumore convenzionale prima dell'amplificatore di ricezione, pari al rapporto fra la potenza del segnale ricevuto e la potenza del rumore convenzionale sulla banda del segnale, $k_f^2 = M_x/x_M^2$ è il quadrato del *fattore di forma*, in cui M_x è la potenza del segnale di informazione $x(t)$, $|x(t)| \leq x_M$ (se $x(t)$ non è ad ampiezza limitata, si definisce x_M ponendo $\mathrm{P}[|x(t)| \leq x_M] \simeq 1$. Nei casi di interesse, come ricordato, $k_f < 1$.)

Ad esempio, nella radiodiffusione FM commerciale, la banda del segnale di informazione $x(t)$ è $B = 15$ kHz, mentre ΔF= 75 kHz. La banda del segnale modulato risulta, utilizzando la formula di Carson, $B_v = 180$ kHz, mentre, assumendo $k_f^2 = 0.5$, si ha

$$\Lambda = 37.5\ \Lambda_c.$$

L'operazione di derivazione nel demodulatore FM tende ad accentuare il rumore alle alte frequenze. Per questo, nei sistemi commerciali, si utilizzano dei filtri di enfasi/de-enfasi al trasmettitore e ricevitore. In particolare, si amplificano le alte frequenze nel segnale di informazione prima della trasmissione. Al ricevitore, dopo la demodulazione, le alte frequenze vengono attenuate. In questo modo, il procedimento risulta trasparente per il segnale, mentre riduce il rumore. Questo comporta un ulteriore aumento del rapporto segnale/rumore complessivo pari a circa 6-10 dB.