Stima della Densità Spettrale di Potenza

Richiami Teorici. Dato un processo aleatorio stazionario $x(t), t \in Z(T)$, con correlazione $r_x(kT)$ e densità spettrale $R_x(f)$, ha interesse calcolare una stima $\tilde{R}_x(f)_{MT}$ di $R_x(f)$ a partire da una versione troncata di una realizzazione di $x(kT)$. A tale scopo, a partire dai campioni $x(kT), kT \in \{0, ..., (M-1)T\}$, $M = KN$, di una realizzazione del processo si costruiscono le K sequenze lunghe N campioni

$$x_i(nT) = \begin{cases} x(iNT + nT), & n \in \{0, ..., N-1\} \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

per $i = 0, 1, ..., K-1$. Si può infatti dimostrare, sotto opportune ipotesi, che per N tendente all'infinito, la aspettazione

$$\mathrm{E}[\frac{1}{NT}|X_i(f)|^2],$$

dove

$$X_i(f) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_i(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

è la trasformata di Fourier della sequenza $x_i(nT)$, tende alla densità spettrale del processo $R_x(f)$. Una stima *polarizzata* $\tilde{R}_x(f)_{MT}$ dello spettro di $x(t)$ (*Periodogramma di Welch*) è data da

$$\tilde{R}_x(f)_{MT} = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \tilde{R}_{x_i}(f)_{NT} = \frac{1}{KNT} \sum_{i=0}^{K-1} |X_i(f)|^2. \tag{1}$$

La stima si dice polarizzata in quanto, per K tendente all'infinito, la stima converge, a causa della moltiplicazione del processo per una finestra rettangolare $w_i(nT)$ per ottenere ciascun blocco $x_i(nT)$, alla convoluzione della densità spettrale con $|W_i(f)|^2$, in questo caso un impulso sinc periodico. Invece della finestra rettangolare, si possono utilizzare finestre con forme diverse, e si parla in tal caso di Periodogramma modificato. In tal caso, il coefficiente NT in (1), viene sostituito dall'energia U della finestra (pari appunto a NT per una finestra rettangolare).

Essendo $x_i(nT)$ di durata limitata, i valori di $X_i(f)$ possono essere calcolati mediante la DFT

$$X_i(kF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_i(nT) e^{-j2\pi kFnT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_i(nT) e^{-j2\pi kn/N}, \;\; F = 1/(NT),$$

e, in forma veloce, con un algoritmo di FFT.
La funzione Matlab

`periodogram(x,NFFT,NOVERLAP,WINL,Fs,W)`

calcola, sulla base di quanto presentato, una stima dello spettro a partire dai campioni nel vettore `x` di ingresso (per maggiori informazioni, `help periodogram`).

Ad esempio, con i comandi

```
T=1/8000; s2=2;
x=sqrt(s2)*randn(1,200000);
[P,f]=periodogram(x,512,0,256,1/T);
plot(f,10*log10(P),[f(1),f(length(f))], [10*log10(s2*T), 10*log10(s2*T)]);
axis([0,8000,-50,-25]); xlabel('Hz'); ylabel('Rx(f) (dB)');
```

si disegnano (in dB, nel periodo $f \in [0, 1/T]$) la densità spettrale teorica $R_x(f) = \sigma^2 T$ e quella stimata di un rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza $\sigma_x^2 = 2$, definito su $Z(T)$, $T = 1/8000$. L'ingresso viene suddiviso in blocchi di lunghezza pari a 256 campioni, e si calcolano 512 valori della trasformata di Fourier di ciascun blocco mediante FFT.

Con i comandi

```
T=1/8000; s2=2;
x=sqrt(s2)*randn(1,200000);
h=[0.25 0.5 0.25]/T;
y=T*conv(x,h);
[P,f]=periodogram(y,512,0,256,1/T);
Hf=T*(h(1)+h(2)*exp(-j*2*pi*T*f)+h(3)*exp(-j*4*pi*T*f));
Ry=s2*T*abs(Hf).^2;
plot(f,Ry,f,P);
xlabel('Hz'); ylabel('Rx(f)');
```

si disegnano (nel periodo $f \in [0, 1/T]$) la densità spettrale teorica $R_x(f) = \sigma^2 T |H(f)|^2$ e quella stimata di un processo gaussiano ottenuto mediante filtraggio del rumore bianco.